Université de Sherbrooke
Département d'informatique

IGL501 : Méthodes formelles en génie logiciel
Automne 2005

Examen périodique
Toute documentation permise
Horaire : de 13h30 à 16h30

1. (**15 pt**) Donnez une preuve de la formule suivante :

   $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \wedge q$

   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\lceil p \wedge (p \Rightarrow q)\rceil^{[1]}}{p}\,[\wedge-\text{elim1}] \qquad \dfrac{\dfrac{\lceil p \wedge (p \Rightarrow q)\rceil^{[1]}}{p}\,[\wedge-\text{elim1}] \qquad \dfrac{\lceil p \wedge (p \Rightarrow q)\rceil^{[1]}}{p \Rightarrow q}\,[\wedge-\text{elim2}]}{q}\,[\Rightarrow-\text{elim}]}{p \wedge q}\,[\wedge-\text{intro}]}{p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \wedge q}\,[\Rightarrow-\text{intro}]^{[1]}$$

2. (**15 pt**) Donnez une preuve de la formule suivante :

   $p \vee (q \wedge r) \Rightarrow p \vee q$

   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\lceil p \vee (q \wedge r)\rceil^{[1]} \qquad \dfrac{\lceil p\rceil^{[2]}}{p \vee q}\,[\vee-\text{intro1}] \qquad \dfrac{\dfrac{\lceil q \wedge r\rceil^{[2]}}{q}\,[\wedge-\text{elim1}]}{p \vee q}\,[\vee-\text{intro2}]}{p \vee q}\,[\vee-\text{elim}]^{[2]}}{p \vee (q \wedge r) \Rightarrow p \vee q}\,[\Rightarrow-\text{intro}]^{[1]}$$

3. (**20 pt**) Traduisez les énoncés suivants en formules selon le langage Tarski.

   (a) L'objet a est un cube large si, et seulement si, tous les autres objets sont des dodécaèdres moyens ou petits.
   Solution:

$$\mathit{cube}(a) \wedge \mathit{large}(a) \Leftrightarrow \forall\, x\ (x \neq a \Rightarrow \mathit{dodec}(x) \wedge (\mathit{small}(x) \vee \mathit{medium}(x)))$$

(b) L'objet a est un cube large si, et seulement si, tous les autres objets *qui* sont des dodécaèdres *sont aussi* moyens ou petits.

Solution:

$$cube(a) \wedge large(a) \Leftrightarrow \forall\, x\ (x \neq a \wedge dodec(x) \Rightarrow small(x) \vee medium(x))$$

(c) S'il existe un petit cube, alors il y a au moins un dodécaèdre large situé à la droite de tous les cubes.

Solution:

$$(\exists\, x\ \ cube(x) \wedge small(x)) \Rightarrow \exists\, y\ \ dodec(y) \wedge large(y) \wedge \forall\, z\ \ cube(z) \Rightarrow leftof(z, y)$$

(d) Les objets du monde sont répartis comme suit : les dodécaèdres sont entre situés entre les cubes et les tétraèdres; plus précisément, les cubes sont à gauche, les dodécaèdre au centre et les tétraèdres à droite.

Solution:

$$\begin{aligned} &\forall\, x\ \ \forall\, y \\ &\qquad (cube(x) \wedge dodec(y) \Rightarrow leftof(x, y)) \\ &\qquad \wedge \\ &\qquad (dodec(x) \wedge tet(y) \Rightarrow leftof(x, y)) \\ &\qquad \wedge \\ &\qquad (cube(x) \wedge tet(y) \Rightarrow leftof(x, y)) \end{aligned}$$

4. (**10 pt**) Déterminez si les énoncés suivants sont vrais. Justifiez votre réponse.

   (a) $A \times B \in A \leftrightarrow B$ **Solution:** vrai

   (b) $A \rightarrow B \subseteq A \times B$ **Solution:** faux

   (c) $A \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} B \subseteq A \rightarrow B$ **Solution:** faux

   (d) $f \in A \rightarrow B \Rightarrow f \in A \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} B$ **Solution:** vrai

   (e) Soit $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$

      i. $\{(0, a), (0, b), (1, c)\} \in A \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} B$ **Solution:** faux

      ii. $\{(0, a), (0, b), (1, c)\}^{-1} \in B \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} A$ **Solution:** vrai

      iii. $\{(0, a), (0, b), (1, c)\}^{-1} \in B \rightarrow A$ **Solution:** vrai

      iv. $\{(0, a), (0, b), (1, c)\}^{-1} \in B \twoheadrightarrow A$ **Solution:** faux

      v. $\{(0, a), (0, b), (1, c)\}^{-1} \in B \mathrel{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} A$ **Solution:** faux

5. (**5 pt**) Soit $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ et $r = \{(0, a), (0, b), (1, c)\}$. Évaluez les expressions suivantes.

   (a) $\{0\} \lhd r$ **Solution:** $\{(0, a), (0, b)\}$

   (b) $\{1\} \mathbin{\lhd\!\!\!-} r$ **Solution:** $\{(0, a), (0, b)\}$

   (c) $r \mathbin{<\!\!\!+} \{(0, c)\}$ **Solution:** $\{(0, c), (1, c)\}$

(d) $r \mathbin{;} (r^{-1})$ **Solution:** $\{(0,0),(1,1)\}$

6. (**5 pt**) Donnez le résultat de l'opération suivante pour l'appel $\text{op}(2,1)$ et $v_1 = 1$ et $v_2 = 4$.

$$
\begin{array}{l}
sortie \leftarrow \text{op}(x,y) = \\
\quad \text{PRE } x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \\
\quad \text{THEN} \\
\quad\quad v_1 := v_1 + x \parallel \\
\quad\quad v_2 := v_2 + y \parallel \\
\quad\quad sortie := v_1 * v_2 \\
\quad \text{END}
\end{array}
$$

Solution: $v_1 = 1 + 2 = 3$, $v_2 = 4 + 1 = 5$ et $sortie = 1 * 4 = 4$

7. (**5 pt**) Déterminez si l'opération

$$\text{op}(x) = \text{PRE } x \in \{1,2\} \wedge y \in \{1,2\} \text{ THEN } y := y + (2 * x)$$

préserve l'invariant $y \in \{1,2,3,4,5\}$. Justifiez votre réponse.

Solution: L'invariant n'est pas préservé pour $x = 2$ et $y = 2$.

8. (**5 pt**) Écrivez une opération tri(x), où x est une séquence injective de nombres naturels ($x \in \mathsf{iseq}(\mathbb{N})$), qui retourne la séquence x triée en ordre croissant.

Solution:

$$
\begin{array}{l}
y \leftarrow \mathsf{tri}(x) = \\
\quad \text{PRE } x \in \mathsf{iseq}(\mathbb{N}) \\
\quad \text{THEN} \\
\quad\quad \text{ANY } z \text{ WHERE} \\
\quad\quad\quad z \in \mathsf{iseq}(\mathbb{N}) \wedge \\
\quad\quad\quad ran(z) = ran(x) \wedge \\
\quad\quad\quad \forall\, i \cdot i \in 0..(card(dom(z)) - 2) \Rightarrow z(i) \leq z(i+1) \\
\quad\quad \text{THEN } y := z \\
\quad\quad \text{END} \\
\quad \text{END}
\end{array}
$$

9. (**5 pt**) Écrivez une opération $\mathsf{minMax}(s)$ qui retourne le minimum et le maximun de l'ensemble de $s \subseteq \mathbb{N}$.

Solution:

$$
\begin{array}{l}
min, max \leftarrow \mathsf{minMax}(s) = \\
\quad \text{PRE } s \subseteq \mathbb{N} \wedge s \neq \{\} \\
\quad \text{THEN} \\
\quad\quad \text{ANY } z_1, z_2 \text{ WHERE}
\end{array}
$$

$z_1 \in s \wedge$
$z_2 \in s \wedge$
$\forall x \cdot (x \in s \Rightarrow z_1 \leq x) \wedge$
$\forall x \cdot (x \in s \Rightarrow z_2 \geq x) \wedge$
THEN $min := z_1 \parallel max := z_2$
END
END

10. (**15 pt**) Écrivez une machine B qui calcule la moyenne des notes d'un cours. Elle doit avoir les opérations suivantes:

    - ajouterNote(x), qui ajoute la note x; x est une valeur comprise en 0 et 100.
    - supprimerNote(x), qui supprime la note x; l'opération termine seulement si x a déjà été entré auparavant.
    - $r \leftarrow$ afficherMoyenne, qui affiche la moyenne des notes entrées jusqu'à date. Naturellement, elle ne tient compte que des notes entrées et non-supprimées.

    Solution:

    MACHINE Moyenne
    VARIABLES $somme, valeurs$
    INVARIANT $somme \in \mathbb{N} \wedge valeurs \in \mathbb{N} \nrightarrow 0..100$
    INITIALIZATION $somme := 0 \parallel valeurs := \{\}$
    OPERATIONS
    ajouterNote$(x) =$
    PRE $x \in 0..100$
    THEN
    $somme := somme + x \parallel$
    ANY y WHERE $y \in \mathbb{N} \wedge y \notin dom(valeurs)$ THEN $valeurs := valeurs \cup \{y \mapsto x\}$
    END;

    supprimerNote$(x) =$
    PRE $x \in \mathsf{ran}(valeurs) \wedge somme \geq x$
    THEN
    $somme := somme - x \parallel$
    ANY y WHERE $y \mapsto x \in valeurs$ THEN $valeurs := valeurs - \{y \mapsto x\}$
    END;

    $r \leftarrow$ afficherMoyenne
    IF $valeurs \neq \{\}$
    THEN $r := somme/card(valeurs)$
    ELSE $r := 0$
    END