Université de Sherbrooke - Département d'informatique
MAT115 - Logique et mathématiques discrètes
Marc Frappier, professeur

Devoir 2
Date de remise : vendredi 27 septembre à 16:00

Effectuez ce devoir en équipe de 4 personnes; les équipes ont été mises à jour; voir TurninWeb. Utilisez TurninWeb, le système de soumission de travaux du Département d'informatique, pour soumettre votre travail. Soumettez 10 fichiers, soit:

- devoir2.pdf, un document PDF qui contient les réponses à toutes ces questions, incluant les arbres de preuves de la question 1.
- a.panda, b.panda, ..., i.panda, qui contiennent vos preuves en format Panda

Utilisez les symboles mathématiques pour formatter votre fichier devoir2.pdf. Les documents suivants donnent un exemple d'utilisation, et vous pouvez utiliser copier-coller pour les reproduire.
`https://marcfrappier.espaceweb.usherbrooke.ca/mat115/ref/math-symboles.docx`
`https://marcfrappier.espaceweb.usherbrooke.ca/mat115/ref/math-symboles.txt`

1. Prouvez les formules suivantes en utilisant Panda. Le fichier texte-pour-panda.txt contient la forme textuelle de ces formules pour Panda. Vous pouvez faire une capture d'écran de chaque preuve en Panda et inclure ces images dans un document word pour la remise du devoir.

   (a) $\vdash ((\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})) \rightarrow (\mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})))$

   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\mathbf{a}\wedge(\mathbf{a}\vee\mathbf{b}))^{(1)}}{\mathbf{a}}(E\wedge)}{(\mathbf{a}\vee(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))}(I\vee)}{((\mathbf{a}\wedge(\mathbf{a}\vee\mathbf{b}))\rightarrow(\mathbf{a}\vee(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})))}(I\rightarrow)(1)$$

   (b) $\vdash ((\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \rightarrow (\mathbf{a} \wedge (\neg\mathbf{a} \vee \mathbf{b})))$

   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{(1)}}{\mathbf{a}}(E\wedge) \qquad \dfrac{\dfrac{(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{(1)}}{\mathbf{b}}(E\wedge)}{(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(I\vee)}{(\mathbf{a}\wedge(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b}))}(I\wedge)}{((\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\rightarrow(\mathbf{a}\wedge(\neg\mathbf{a}\vee\mathbf{b})))}(I\rightarrow)(1)$$

   (c) $\vdash ((\mathbf{a} \vee (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})) \rightarrow (\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})))$

   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{(\mathbf{a}\vee(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))^{(1)} \qquad \dfrac{\mathbf{a}^{(2)} \quad \dfrac{\mathbf{a}^{(2)}}{(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(I\vee)}{(\mathbf{a}\wedge(\mathbf{a}\vee\mathbf{b}))}(I\wedge) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{(3)}}{\mathbf{b}}(E\wedge)}{(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(I\vee) \quad \dfrac{(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{(3)}}{\mathbf{a}}(E\wedge)}{(\mathbf{a}\wedge(\mathbf{a}\vee\mathbf{b}))}(I\wedge)}{(\mathbf{a}\wedge(\mathbf{a}\vee\mathbf{b}))}(E\vee)(2)(3)}{((\mathbf{a}\vee(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))\rightarrow(\mathbf{a}\wedge(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})))}(I\rightarrow)(1)$$

(d) $\vdash (((\mathbf{a} \land \lnot \mathbf{b}) \lor (\lnot \mathbf{a} \land \mathbf{b})) \to ((\mathbf{a} \lor \mathbf{b}) \land \lnot (\mathbf{a} \land \mathbf{b})))$

Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{((\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})\lor(\lnot\mathbf{a}\land\mathbf{b}))^{(1)} \quad \dfrac{\dfrac{(\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})^{(2)}}{\mathbf{a}}(E\land)}{(\mathbf{a}\lor\mathbf{b})}(I\lor) \quad \dfrac{\dfrac{(\lnot\mathbf{a}\land\mathbf{b})^{(3)}}{\mathbf{b}}(E\land)}{(\mathbf{a}\lor\mathbf{b})}(I\lor)}{(\mathbf{a}\lor\mathbf{b})}(E\lor)(2)(3) \quad \dfrac{\dfrac{((\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})\lor(\lnot\mathbf{a}\land\mathbf{b}))^{(1)} \quad \dfrac{\dfrac{(\mathbf{a}\land\mathbf{b})^{(4)}}{\mathbf{b}}(E\land) \quad \dfrac{(\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})^{(5)}}{\lnot\mathbf{b}}(E\land)}{\bot}(I\bot) \quad \dfrac{\dfrac{(\mathbf{a}\land\mathbf{b})^{(4)}}{\mathbf{a}}(E\land) \quad \dfrac{(\lnot\mathbf{a}\land\mathbf{b})^{(6)}}{\lnot\mathbf{a}}(E\land)}{\bot}(I\bot)}{\bot}(E\lor)(5)(6)}{\lnot(\mathbf{a}\land\mathbf{b})}(I\lnot)(4)}{((\mathbf{a}\lor\mathbf{b})\land\lnot(\mathbf{a}\land\mathbf{b}))}(I\land)}{(((\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})\lor(\lnot\mathbf{a}\land\mathbf{b}))\to((\mathbf{a}\lor\mathbf{b})\land\lnot(\mathbf{a}\land\mathbf{b})))}(I\to)(1)$$

(e) $\vdash (((\mathbf{a} \land \mathbf{b}) \lor \lnot (\mathbf{a} \lor \mathbf{b})) \to ((\mathbf{a} \to \mathbf{b}) \land (\mathbf{b} \to \mathbf{a})))$

Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{((\mathbf{a}\land\mathbf{b})\lor\lnot(\mathbf{a}\lor\mathbf{b}))^{(1)} \quad \dfrac{(\mathbf{a}\land\mathbf{b})^{(3)}}{\mathbf{b}}(E\land) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{a}^{(2)}}{(\mathbf{a}\lor\mathbf{b})}(I\lor) \quad \lnot(\mathbf{a}\lor\mathbf{b})^{(4)}}{\bot}(I\bot)}{\mathbf{b}}(E\bot)}{\mathbf{b}}(E\lor)(3)(4)}{(\mathbf{a}\to\mathbf{b})}(I\to)(2) \quad \dfrac{\dfrac{((\mathbf{a}\land\mathbf{b})\lor\lnot(\mathbf{a}\lor\mathbf{b}))^{(1)} \quad \dfrac{(\mathbf{a}\land\mathbf{b})^{(6)}}{\mathbf{a}}(E\land) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{b}^{(5)}}{(\mathbf{a}\lor\mathbf{b})}(I\lor) \quad \lnot(\mathbf{a}\lor\mathbf{b})^{(7)}}{\bot}(I\bot)}{\mathbf{a}}(E\bot)}{\mathbf{a}}(E\lor)(6)(7)}{(\mathbf{b}\to\mathbf{a})}(I\to)(5)}{((\mathbf{a}\to\mathbf{b})\land(\mathbf{b}\to\mathbf{a}))}(I\land)}{(((\mathbf{a}\land\mathbf{b})\lor\lnot(\mathbf{a}\lor\mathbf{b}))\to((\mathbf{a}\to\mathbf{b})\land(\mathbf{b}\to\mathbf{a})))}(I\to)(1)$$

(f) $\vdash ((\lnot \mathbf{a} \lor \mathbf{b}) \to \lnot (\mathbf{a} \land \lnot \mathbf{b}))$

Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\lnot\mathbf{a}\lor\mathbf{b})^{(1)} \quad \dfrac{\dfrac{(\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})^{(2)}}{\mathbf{a}}(E\land) \quad \lnot\mathbf{a}^{(3)}}{\bot}(I\bot) \quad \dfrac{\mathbf{b}^{(4)} \quad \dfrac{(\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})^{(2)}}{\lnot\mathbf{b}}(E\land)}{\bot}(I\bot)}{\bot}(E\lor)(3)(4)}{\lnot(\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})}(I\lnot)(2)}{((\lnot\mathbf{a}\lor\mathbf{b})\to\lnot(\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b}))}(I\to)(1)$$

(g) $\vdash (\lnot (\mathbf{a} \land \lnot \mathbf{b}) \to (\lnot \mathbf{a} \lor \mathbf{b}))$

Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\lnot\mathbf{a}^{(3)}}{(\lnot\mathbf{a}\lor\mathbf{b})}(I\lor) \quad \lnot(\lnot\mathbf{a}\lor\mathbf{b})^{(2)}}{\bot}(I\bot)}{\lnot\lnot\mathbf{a}}(I\lnot)(3)}{\mathbf{a}}(E\lnot) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{b}^{(4)}}{(\lnot\mathbf{a}\lor\mathbf{b})}(I\lor) \quad \lnot(\lnot\mathbf{a}\lor\mathbf{b})^{(2)}}{\bot}(I\bot)}{\lnot\mathbf{b}}(I\lnot)(4)}{(\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})}(I\land) \quad \lnot(\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})^{(1)}}{\bot}(I\bot)}{\lnot\lnot(\lnot\mathbf{a}\lor\mathbf{b})}(I\lnot)(2)}{(\lnot\mathbf{a}\lor\mathbf{b})}(E\lnot)}{(\lnot(\mathbf{a}\land\lnot\mathbf{b})\to(\lnot\mathbf{a}\lor\mathbf{b}))}(I\to)(1)$$

(h) $\vdash (((\mathbf{a} \to \mathbf{b}) \land (\mathbf{b} \to \mathbf{c})) \to (\mathbf{a} \to \mathbf{c}))$

Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{((\mathbf{a}\to\mathbf{b})\land(\mathbf{b}\to\mathbf{c}))^{(1)}}{(\mathbf{b}\to\mathbf{c})}(E\land) \quad \dfrac{\dfrac{((\mathbf{a}\to\mathbf{b})\land(\mathbf{b}\to\mathbf{c}))^{(1)}}{(\mathbf{a}\to\mathbf{b})}(E\land) \quad \mathbf{a}^{(2)}}{\mathbf{b}}(E\to)}{\mathbf{c}}(E\to)}{(\mathbf{a}\to\mathbf{c})}(I\to)(2)}{(((\mathbf{a}\to\mathbf{b})\land(\mathbf{b}\to\mathbf{c}))\to(\mathbf{a}\to\mathbf{c}))}(I\to)(1)$$

(i) $\vdash (((\mathbf{a} \lor \lnot \mathbf{c}) \land (\mathbf{b} \lor \mathbf{c})) \to (\mathbf{a} \lor \mathbf{b}))$

Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{((\mathbf{a}\vee\neg\mathbf{c})\wedge(\mathbf{b}\vee\mathbf{c}))^{(1)}}{(\mathbf{a}\vee\neg\mathbf{c})}(E\wedge) \qquad \dfrac{\mathbf{a}^{(2)}}{(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(I\vee) \qquad \dfrac{\dfrac{((\mathbf{a}\vee\neg\mathbf{c})\wedge(\mathbf{b}\vee\mathbf{c}))^{(1)}}{(\mathbf{b}\vee\mathbf{c})}(E\wedge) \qquad \dfrac{\mathbf{b}^{(4)}}{(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(I\vee) \qquad \dfrac{\dfrac{\mathbf{c}^{(5)} \qquad \neg\mathbf{c}^{(3)}}{\bot}(I\bot)}{(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(E\bot)}{(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(E\vee)(4)(5)}{(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}(E\vee)(2)(3)}{(((\mathbf{a}\vee\neg\mathbf{c})\wedge(\mathbf{b}\vee\mathbf{c}))\rightarrow(\mathbf{a}\vee\mathbf{b}))}(I\rightarrow)(1)$$

2. Énumérez tous les modèles de la formule suivante, sous la forme d'un tableau de vérité, comme pour celui de la formule LP-17 des notes de cours, page 28 des notes de cours.

$$X_1 \wedge X_2 \Rightarrow \neg(X_1 \vee X_3)$$

Solution:

X_1	X_2	X_3	X_1	$\wedge$	X_2	$\Rightarrow$	$\neg$	$(X_1$	$\vee$	$X_3)$	Modèle?
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	*oui*
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	*oui*
0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	*oui*
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	*oui*
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	*oui*
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	*oui*
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	*non*
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	*non*

3. Déterminez si l'ensemble constitué des 3 formules suivantes est cohérent. Justifiez votre réponse.

$$(X_1 \vee X_2) \Rightarrow X_3$$

$$\neg X_1 \wedge X_2$$

$$\neg X_3$$

Solution:

Non, car aucune valuation ne permet de satiusfaire les 3 formules en même temps. Voici la table de vérité des trois formules.

X_1	X_2	X_3	$(X_1 \vee X_2) \Rightarrow X_3$	$\neg X_1 \wedge X_2$	$\neg X_3$	Modèle
0	0	0	1	0	1	*non*
0	0	1	1	0	0	*non*
0	1	0	0	1	1	*non*
0	1	1	1	1	0	*non*
1	0	0	0	0	1	*non*
1	0	1	1	0	0	*non*
1	1	0	0	0	1	*non*
1	1	1	1	0	0	*non*

4. Vérifiez si $\{(X_1 \wedge \neg X_2) \Rightarrow X_3, \quad X_2\} \Vdash X_3$

   Solution:

   Non. Il y a seulement quatre valuations où les formules à gauche de "$\Vdash$" sont satisfaites en même temps. Pour les cas $[X_1 := 0, X_2 := 1, X_3 := 0]$ et $[X_1 := 1, X_2 := 1, X_3 := 0]$, les formules à gauche de "$\Vdash$" sont satisfaites, mais pas la formule X_3. Donc X_3 n'est pas une conséquence logique des deux premières.

X_1	X_2	X_3	$(X_1 \wedge \neg X_2) \Rightarrow X_3$	X_2	X_3	Conséquence
0	0	0	1	0	0	*N/A*
0	0	1	1	0	1	*N/A*
0	1	0	1	1	0	*non*
0	1	1	1	1	1	*oui*
1	0	0	0	0	0	*N/A*
1	0	1	1	0	1	*N/A*
1	1	0	1	1	0	*non*
1	1	1	1	1	1	*oui*

Note: Pour les questions 5, 6, 7 ci-dessous, vous pouvez utiliser les lois des tableaux 1.3 à 1.10 des notes de cours.

Attention: Vous devez utiliser le format de preuve utilisé dans les notes de cours (les autres formats ne seront pas acceptés). Voici un exemple

$$
\begin{array}{ll}
\quad \mathcal{A}_1 & \\
\Leftrightarrow & \langle \text{ justification } \rangle \\
\quad \mathcal{A}_2 & \\
\Leftrightarrow & \langle \text{ justification } \rangle \\
\ldots & \\
\Leftrightarrow & \langle \text{ justification } \rangle
\end{array}
$$

$\mathcal{A}_n$

Les justifications doivent apparaître sur des lignes séparées des formules.

5. Transformez chaque formule suivante en une formule équivalente en forme normale conjonctive. Prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Utilisez une seule loi par étape. Vous pouvez utiliser la commutativité et l'associativité de $\wedge$ et $\vee$ sans citer les lois LP-7 à LP-10, pour racourcir les preuves.

   (a) $\neg(X_1 \vee X_2) \Rightarrow \neg(X_3 \wedge X_4)$

   Solution:

$$\begin{array}{ll} & \neg(X_1 \vee X_2) \Rightarrow \neg(X_3 \wedge X_4) \\ \Leftrightarrow & \qquad\qquad \langle \text{ LP-22 } \rangle \\ & \neg\neg(X_1 \vee X_2) \vee \neg(X_3 \wedge X_4) \\ \Leftrightarrow & \qquad\qquad \langle \text{ LP-21 } \rangle \\ & X_1 \vee X_2 \vee \neg(X_3 \wedge X_4) \\ \Leftrightarrow & \qquad\qquad \langle \text{ LP-17 } \rangle \\ & X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3 \vee \neg X_4 \end{array}$$

   (b) $\neg(X_1 \Rightarrow X_2 \vee X_3)$

   Solution:

$$\begin{array}{ll} & \neg(X_1 \Rightarrow X_2 \vee X_3) \\ \Leftrightarrow & \qquad\qquad \langle \text{ LP-22 } \rangle \\ & \neg(\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3) \\ \Leftrightarrow & \qquad\qquad \langle \text{ LP-18 (2 fois) } \rangle \\ & \neg\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3 \\ \Leftrightarrow & \qquad\qquad \langle \text{ LP-21 } \rangle \\ & X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3 \end{array}$$

   (c) $\neg(X_1 \Rightarrow X_2 \wedge X_3)$

   Solution:

$$\begin{array}{ll} & \neg(X_1 \Rightarrow X_2 \wedge X_3) \\ \Leftrightarrow & \qquad\qquad \langle \text{ LP-22 } \rangle \\ & \neg(\neg X_1 \vee X_2 \wedge X_3) \end{array}$$

$\Leftrightarrow \qquad \langle$ LP-18 $\rangle$
$\neg\neg X_1 \wedge \neg(X_2 \wedge X_3)$
$\Leftrightarrow \qquad \langle$ LP-21 $\rangle$
$X_1 \wedge \neg(X_2 \wedge X_3)$
$\Leftrightarrow \qquad \langle$ LP-17 $\rangle$
$X_1 \wedge (\neg X_2 \vee \neg X_3)$

6. Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive. Prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Utilisez une seule loi par étape. Vous pouvez utiliser la commutativité et l'associativité de $\wedge$ et $\vee$ sans citer les lois LP-7 à LP-10, pour racourcir les preuves.

$$\neg(X_1 \vee (X_2 \wedge \neg X_3))$$

Solution:

$\neg(X_1 \vee (X_2 \wedge \neg X_3))$
$\Leftrightarrow \qquad \langle$ LP-18 $\rangle$
$\neg X_1 \wedge \neg(X_2 \wedge \neg X_3)$
$\Leftrightarrow \qquad \langle$ LP-17 $\rangle$
$\neg X_1 \wedge (\neg X_2 \vee \neg\neg X_3)$
$\Leftrightarrow \qquad \langle$ LP-21 $\rangle$
$\neg X_1 \wedge (\neg X_2 \vee X_3)$
$\Leftrightarrow \qquad \langle$ LP-11 $\rangle$
$\neg X_1 \wedge \neg X_2 \vee \neg X_1 \wedge X_3$

7. Dite si la formule suivante est une loi de la logique propositionnelle; justifiez votre réponse par une preuve ou une table de vérité.

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge \neg c) \Leftrightarrow (a \vee \neg c) \wedge (b \vee c)$$

Solution: Oui, c'est une tautologie.

X_1	X_2	X_3	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge \neg c) \Leftrightarrow (a \vee \neg c) \wedge (b \vee c)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Voici une preuve en utilisant les lois de la logique propositionnelle.

$$
\begin{array}{ll}
 & (a \vee \neg c) \wedge (b \vee c) \\
\Leftrightarrow & \qquad\qquad \langle \text{ LP-11 deux fois } \rangle \\
 & a \wedge b \vee a \wedge c \vee b \wedge \neg c \vee \neg c \wedge c \\
\Leftrightarrow & \qquad\qquad \langle \text{ LP-19 } \rangle \\
 & a \wedge b \vee a \wedge c \vee b \wedge \neg c \vee \mathsf{faux} \\
\Leftrightarrow & \qquad\qquad \langle \text{ LP-4 } \rangle \\
 & a \wedge b \vee a \wedge c \vee b \wedge \neg c
\end{array}
$$