Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen final

Professeur : Marc Frappier

Lundi 14 décembre 2015, 9h à 12h
Salles : D3-2036, D3-2039, D3-2041

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Tout appareil électronique interdit.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- La note de l'examen est sur 100. Le total des points des questions donne 110. Votre note sera tronquée à 100 si elle dépasse 100. Vous pouvez répondre à toutes les questions.

Pondération :

Question	Point		Question	Point
1	10		2	10
3	10		4	10
5	10		6	15
7	5		8	10
9	15		10	15
			total	110

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Signature : ______________________ Matricule : ______________________

1. (**10 pt**) Prouvez la formule suivante par induction.

$$\forall x \cdot x \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=0}^{x} 4^i = \frac{4^{x+1}-1}{3}$$

Solution: Cas de base: $x = 0$.

$$\begin{array}{ll} & \sum_{i=0}^{0} 4^i \\ = & \quad \{ 4^0 = 1 \} \\ & 1 \\ = & \quad \{ \text{Arithmétique} \} \\ & \frac{4^{0+1}-1}{3} \end{array}$$

Cas d'induction: $x > 0$. Voici l'hypothèse d'induction.

$$\sum_{i=0}^{x-1} 4^i = \frac{4^x - 1}{3} \qquad \text{(HI)}$$

Preuve du cas d'induction.

$$\begin{array}{ll} & \sum_{i=0}^{x} 4^i \\ = & \quad \{ \text{déf. } \Sigma \} \\ & (\sum_{i=0}^{x-1} 4^i) + 4^x \\ = & \quad \{ \text{(HI)} \} \\ & \frac{4^x-1}{3} + 4^x \\ = & \quad \{ \text{Arithmétique} \} \\ & \frac{4^x-1}{3} + \frac{3*4^x}{3} \\ = & \quad \{ \text{Arithmétique} \} \\ & \frac{4*4^x-1}{3} \\ = & \quad \{ \text{Arithmétique} : b^m b^n = b^{m+n} \} \\ & \frac{4^{x+1}-1}{3} \end{array}$$

$\square$

2. (**10 pt**) Prouvez la formule suivante. Soit $r \in S \leftrightarrow S$, $T \subseteq S$

$$r \rhd T = r \cap (S \times T)$$

Solution:

$$\begin{array}{ll}
 & r \rhd T \\
= & \qquad \{ \text{ def } \rhd \} \\
 & \{x \mapsto y \mid x \mapsto y \in r \wedge y \in T\} \\
= & \qquad \{ \ x \mapsto y \in r \wedge r \in S \leftrightarrow S \Rightarrow x \in S, \text{ LP-49 } \} \\
 & \{x \mapsto y \mid x \mapsto y \in r \wedge x \in S \wedge y \in T\} \\
= & \qquad \{ \text{ def. } \times \} \\
 & \{x \mapsto y \mid x \mapsto y \in r \wedge x \mapsto y \in S \times T\} \\
= & \qquad \{ \text{ def. } \cap \} \\
 & r \cap (S \times T)
\end{array}$$

$\square$

3. (**10 pt**) Prouvez la formule suivante.

$$\mathsf{dom}(r_1 \cup r_2) = \mathsf{dom}(r_1) \cup \mathsf{dom}(r_2)$$

Solution:

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{dom}(r_1 \cup r_2) \\
= & \qquad \{ \text{ def. } \mathsf{dom} \} \\
 & \{x \mid \exists y \cdot x \mapsto y \in r_1 \cup r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ def. } \cup \} \\
 & \{x \mid \exists y \cdot x \mapsto y \in r_1 \vee x \mapsto y \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ LPO-14 } \} \\
 & \{x \mid \exists y \cdot (x \mapsto y \in r_1) \vee \exists y \cdot (x \mapsto y \in r_2)\} \\
= & \qquad \{ \text{ def. } \mathsf{dom}, 3.51 \} \\
 & \{x \mid x \in \mathsf{dom}(r_1) \vee x \in \mathsf{dom}(r_2)\} \\
= & \qquad \{ \text{ def. } \cup \} \\
 & \mathsf{dom}(r_1) \cup \mathsf{dom}(r_2)
\end{array}$$

$\square$

4. (**10 pt**) Prouvez la formule suivante par induction sur les ensembles finis.

$$\forall A, B \cdot \mathsf{finite}(A) \wedge \mathsf{finite}(B) \Rightarrow (A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; \mathsf{card}(A \cup B) = \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B))$$

Indice: Pour le cas $A \neq \varnothing$, posez $A_0 = A - \{z\}$ avec $z \in A$.

Rappel: l'union est associative

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{1}$$

On utilise aussi la définition suivante de la cardinalité

$$z \notin B \Rightarrow \mathsf{card}(\{z\} \cup B) = 1 + \mathsf{card}(B) \tag{2}$$

$$\mathsf{card}(\varnothing) = 0 \tag{3}$$

Solution:
Preuve par induction sur A. Supposons que A et B sont finis et que $A \cap B = \varnothing$.
Cas de base: $A = \varnothing$.

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{card}(\varnothing \cup B) \\
= & \qquad \{\ \varnothing \cup B = B\ \} \\
 & \mathsf{card}(B) \\
= & \qquad \{\ \mathsf{card}(\varnothing) = 0\ \} \\
 & \mathsf{card}(\varnothing) + \mathsf{card}(B)
\end{array}$$

Cas d'induction: $A \neq \varnothing$. Soit $z \in A$ et $A_0 = A - \{z\}$. Puisque $A_0 \subset A$, voici l'hypothèse d'induction.

$$\forall B \cdot \mathsf{finite}(B) \Rightarrow (A_0 \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathsf{card}(A_0 \cup B) = \mathsf{card}(A_0) + \mathsf{card}(B)) \tag{HI}$$

Preuve du cas d'induction.

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{card}(A \cup B) \\
= & \qquad \{\ A = A_0 \cup \{z\}\ \} \\
 & \mathsf{card}((A_0 \cup \{z\}) \cup B) \\
= & \qquad \{\ (1)\ \} \\
 & \mathsf{card}(A_0 \cup (\{z\} \cup B)) \\
= & \qquad \{\ (\mathsf{HI})[B := B \cup \{z\}], \\
 & \qquad \text{déf. de } A_0 \text{ et } A \cap B = \varnothing \text{ entraine que } A_0 \cap (\{z\} \cup B) = \varnothing\ \} \\
 & \mathsf{card}(A_0) + \mathsf{card}(\{z\} \cup B) \\
= & \qquad \{\ (2), \text{ car} \\
 & \qquad z \in A \text{ et } A \cap B = \varnothing \text{ entraine que } \{z\} \cap B = \varnothing\ \} \\
 & \mathsf{card}(A_0) + 1 + \mathsf{card}(B) \\
= & \qquad \{\ (2), \\
 & \qquad z \notin A_0 \text{ et } \mathsf{card}(A) = \mathsf{card}(A_0 \cup \{z\}) = \mathsf{card}(A_0) + 1\ \} \\
 & \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B)
\end{array}$$

$\square$

5. (**10 pt**) Complétez la preuve suivante. Les parties manquantes sont identifiées par des boites. Selon, le contexte, vous devez donner soit la formule manquante, soit la justification.

$$r \in S \leftrightarrow S \land T \subseteq S$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathsf{id}(T) \,;\, (r_1 \cap r_2) = (\mathsf{id}(T) \,;\, r_1) \cap (\mathsf{id}(T) \,;\, r_2)$$

Solution: Supposons $r \in S \leftrightarrow S \land T \subseteq S$
Prouvons $\mathsf{id}(T) \,;\, (r_1 \cap r_2) = (\mathsf{id}(T) \,;\, r_1) \cap (\mathsf{id}(T) \,;\, r_2)$

$$
\begin{array}{ll}
& \mathsf{id}(T);(r_1 \cap r_2) \\
= & \qquad \{ \text{ def. ";" } \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in (r_1 \cap r_2)\} \\
= & \qquad \{ \text{ def. } \cap, 3.51, \ \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_1 \land z \mapsto y \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ LP-5 } \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_1 \land x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \ x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \Rightarrow x = z \ \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_1 \land x \mapsto x \in \mathsf{id}(T) \land x \mapsto y \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ LPO-2 } \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_1) \land \exists z \cdot (z = x \land x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_2)\} \\
= & \qquad \{ \ x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \Rightarrow x = z, \text{LP-49} \ \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot (x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_1) \land \exists z \cdot (x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_2)\} \\
= & \qquad \{ \text{ def. "; ", 3.51 } \} \\
& \{x \mapsto y | x \mapsto y \in \mathsf{id}(T) \,;\, r_1 \land x \mapsto y \in \mathsf{id}(T) \,;\, r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ def. } \cap \ \} \\
& \mathsf{id}(T);r_1 \cap \mathsf{id}(T);r_2
\end{array}
$$

□

6. (**15 pt**) Pour chaque relation ci-dessous, indiquez les propriétés qu'elle satisfait, en indiquant un X dans la case correspondante. On suppose que $r \in S \leftrightarrow S$ et $S = \{0, 1\}$.

Solution:

r	réflexive	irréflexive	transitive	symétrique	anti-symétrique	antisymétrique forte
{(0,1),(1,0)}		X		X		
{(0,0),(1.1)}	X		X	X	X	
{(0,0)}			X	X	X	
{}		X	X	X	X	X
{(0,1),(1,0),(0,0)}				X		

7. (**5 pt**) Soit $r \in S \leftrightarrow S$. Donnez une expression e telle que e satisfait les propriétés suivantes. Par exemple, pour la propriété "la plus petite relation e telle que e est réflexive et $r \subseteq e$", la réponse est $e = r \cup \mathsf{id}(S)$

   (a) la plus petite relation e telle que e est symétrique et $r \subseteq e$
   Solution: $e = r \cup r^{-1}$

   (b) la plus petite relation e telle que e est transitive et $r \subseteq e$
   Solution: $e = r^{+}$

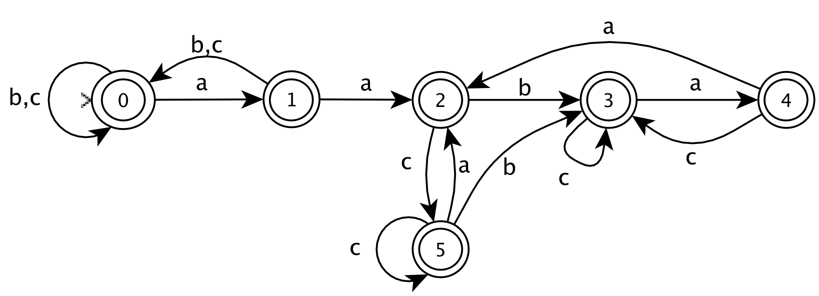
   (c) la plus grande relation e telle que $e \subseteq r$ et e est irréflexive
   Solution: $e = r - \mathsf{id}(S)$

8. (**10 pt**) Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. Définissez un automate pour chaque sous-question suivante. L'automate doit accepter seulement les suites décrites, et refuser toutes les autres suites. Il n'est pas nécessaire de donner l'état puits.

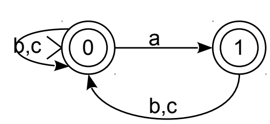
   (a) Chaque sous-suite $[a, a]$ doit être séparée de la prochaine sous-suite $[a, a]$ par exactement un b; un c peut survenir n'importe où. Une suite qui ne contient aucun a est acceptée. Une suite acceptée a donc la forme générale

$$[\ldots, a, a, \ldots, b, \ldots, a, a \ldots, b, \ldots, a, a \ldots]$$

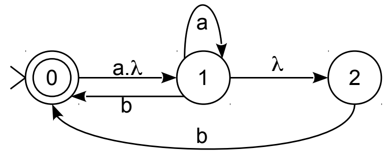
   Solution:



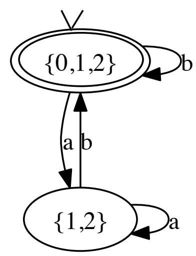
   (b) Une suite acceptée ne contient pas de sous-suite $[a, a]$.
   Solution:



9. (**15 pt**) Déterminisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$



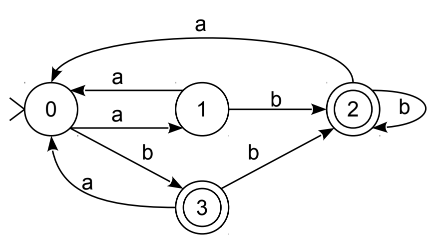
Solution:



$$\lambda\text{-closure} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$$

$$
\begin{aligned}
t = \ \{ & \\
& (0,a,1), (0,a,2), (0,b,0), (0,b,1), (0,b,2), \\
& (1,a,1), (1,a,2), (1,b,0), (1,b,1), (1,b,2), \\
& (2,b,0), (2,b,1), (2,b,2) \\
\} &
\end{aligned}
$$

10. (**15 pt**) Minimisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez le tableau du calcul de la minimisation.



Solution:

Paire	D	r	E
{0,1)			X
{0,2)	X		
{0,3)	X		
{1,2)	X		
{1,3}	X		
{2,3}		{0,1}	X