Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen final

Professeur : Marc Frappier

Lundi 14 décembre 2015, 9h à 12h
Salles : D3-2036, D3-2039, D3-2041

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Tout appareil électronique interdit.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- La note de l'examen est sur 100. Le total des points des questions donne 110. Votre note sera tronquée à 100 si elle dépasse 100. Vous pouvez répondre à toutes les questions.

Pondération :

Question	Point		Question	Point
1	10		2	10
3	10		4	10
5	10		6	15
7	5		8	10
9	15		10	15
			total	110

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Signature : ______________________ Matricule : ______________________

1. (**10 pt**) Prouvez la formule suivante par induction.

$$\forall x \cdot x \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=0}^{x} 4^i = \frac{4^{x+1} - 1}{3}$$

2. (**10 pt**) Prouvez la formule suivante. Soit $r \in S \leftrightarrow S$, $T \subseteq S$

$$r \rhd T = r \cap (S \times T)$$

3. (**10 pt**) Prouvez la formule suivante.

$$\mathsf{dom}(r_1 \cup r_2) = \mathsf{dom}(r_1) \cup \mathsf{dom}(r_2)$$

4. (**10 pt**) Prouvez la formule suivante par induction sur les ensembles finis.

$$\forall A, B \cdot \mathsf{finite}(A) \land \mathsf{finite}(B) \Rightarrow (A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; \mathsf{card}(A \cup B) = \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B))$$

Indice: Pour le cas $A \neq \varnothing$, posez $A_0 = A - \{z\}$ avec $z \in A$.

Rappel: l'union est associative

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{1}$$

On utilise aussi la définition suivante de la cardinalité

$$z \notin B \Rightarrow \mathsf{card}(\{z\} \cup B) = 1 + \mathsf{card}(B) \tag{2}$$

$$\mathsf{card}(\varnothing) = 0 \tag{3}$$

5. (**10 pt**) Complétez la preuve suivante. Les parties manquantes sont identifiées par des boites. Selon, le contexte, vous devez donner soit la formule manquante, soit la justification.

$$r \in S \leftrightarrow S \land T \subseteq S$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathsf{id}(T) \,;\, (r_1 \cap r_2) = (\mathsf{id}(T) \,;\, r_1) \cap (\mathsf{id}(T) \,;\, r_2)$$

PREUVE.

Supposons $\boxed{}$

Prouvons $\boxed{}$

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{id}(T); (r_1 \cap r_2) \\
= \quad & \{ \boxed{} \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in (r_1 \cap r_2)\} \\
= \quad & \{ \boxed{} \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_1 \land z \mapsto y \in r_2\} \\
= \quad & \{ \boxed{} \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_1 \land x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_2\} \\
= \quad & \{ \boxed{} \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_1 \land x \mapsto x \in \mathsf{id}(T) \land x \mapsto y \in r_2\} \\
= \quad & \{ \boxed{} \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_1) \land \exists z \cdot (z = x \land x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_2)\} \\
= \quad & \{ \boxed{} \} \\
& \{x \mapsto y | \exists z \cdot (x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_1) \land \exists z \cdot (x \mapsto z \in \mathsf{id}(T) \land z \mapsto y \in r_2)\} \\
= \quad & \{ \boxed{} \} \\
& \{x \mapsto y | x \mapsto y \in \mathsf{id}(T) \,;\, r_1 \land x \mapsto y \in \mathsf{id}(T) \,;\, r_2\} \\
= \quad & \{ \boxed{} \} \\
& \mathsf{id}(T); r_1 \cap \mathsf{id}(T); r_2 \qquad \square
\end{aligned}
$$

6. (**15 pt**) Pour chaque relation ci-dessous, indiquez les propriétés qu'elle satisfait, en indiquant un X dans la case correspondante. On suppose que $r \in S \leftrightarrow S$ et $S = \{0, 1\}$.

r	réflexive	irréflexive	transitive	symétrique	anti-symétrique	antisymétrique forte
{(0,1),(1,0)}						
{(0,0),(1.1)}						
{(0,0)}						
{}						
{(0,1),(1,0),(0,0)}						

7. (**5 pt**) Soit $r \in S \leftrightarrow S$. Donnez une expression e telle que e satisfait les propriétés suivantes. Par exemple, pour la propriété "la plus petite relation e telle que e est réflexive et $r \subseteq e$", la réponse est $e = r \cup \mathsf{id}(S)$

   (a) la plus petite relation e telle que e est symétrique et $r \subseteq e$

   (b) la plus petite relation e telle que e est transitive et $r \subseteq e$

   (c) la plus grande relation e telle que $e \subseteq r$ et e est irréflexive

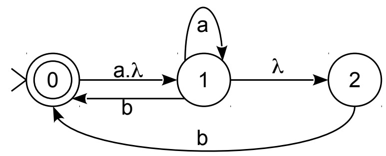
8. (**10 pt**) Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. Définissez un automate pour chaque sous-question suivante. L'automate doit accepter seulement les suites décrites, et refuser toutes les autres suites. Il n'est pas nécessaire de donner l'état puits.

   (a) Chaque sous-suite $[a, a]$ doit être séparée de la prochaine sous-suite $[a, a]$ par exactement un b; un c peut survenir n'importe où. Une suite qui ne contient aucun a est acceptée. Une suite acceptée a donc la forme générale

$$[\ldots, a, a, \ldots, b, \ldots, a, a \ldots, b, \ldots, a, a \ldots]$$

   (b) Une suite acceptée ne contient pas de sous-suite $[a, a]$.

9. (**15 pt**) Déterminisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$

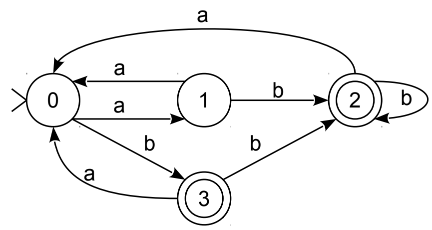


Donnez la valeur de λ-closure.

Donnez la valeur de t.

Dessinez l'automate déterministe ici:

10. (**15 pt**) Minimisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez le tableau du calcul de la minimisation.



Remplissez le tableau du calcul suivant:

Paire	D	r	E
{0,1)			
{0,2)			
{0,3)			
{1,2)			
{1,3}			
{2,3}			

Dessinez l'automate minimisé ici: