Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen final

Professeur : Marc Frappier

Jeudi 22 décembre 2016, 9 h à 12 h
Salles : D7-2021, D7-2031

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Tout appareil électronique interdit.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- La note de l'examen est sur 100. Le total des points des questions donne 110. Votre note sera tronquée à 100 si elle dépasse 100. Vous pouvez répondre à toutes les questions.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 10.

Pondération :

Question	Point		Question	Point	
1	10		2	10	
3	10		4	10	
5	10		6	10	
7	10		8	10	
9	15		10	15	
			total	110	

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Signature : ______________________ Matricule : ______________________

1. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante par induction.

$$\forall n \cdot n \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Solution: Cas de base: $n = 1$.

$$\begin{array}{ll} & \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} \\ = & \quad\quad \{ \text{ déf. de } \Sigma \ \} \\ & \frac{1}{1(1+1)} \\ = & \quad\quad \{ \text{ Arithmétique } \} \\ & \frac{1}{(1+1)} \end{array}$$

Cas d'induction: Soit $n > 1$. Voici l'hypothèse d'induction.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n-1}{(n-1)+1} \qquad \text{(HI)}$$

Preuve du cas d'induction.

$$\begin{array}{ll} & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \\ = & \quad\quad \{ \text{ déf. } \Sigma \ \} \\ & (\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)}) + \frac{1}{n(n+1)} \\ = & \quad\quad \{ \text{ (HI) } \} \\ & \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ = & \quad\quad \{ \text{ Arithmétique } \} \\ & \frac{(n-1)(n+1)+1}{n(n+1)} \\ = & \quad\quad \{ \text{ Arithmétique } \} \\ & \frac{n^2}{n(n+1)} \\ = & \quad\quad \{ \text{ Arithmétique } \} \\ & \frac{n}{n+1} \end{array}$$

□

2. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante. Soit $r1 \in S \leftrightarrow S$, $r2 \in S \leftrightarrow S$, $T \subseteq S$, alors

$$(r_1 \cap (T \times S)) \mathbin{;} r_2 = (r_1 \mathbin{;} r_2) \cap (T \times S)$$

Solution:

$$
\begin{array}{ll}
 & (r_1 \cap (T \times S)) \mathbin{;} r_2 \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } ; \} \\
 & \{(x,y) \mid \exists z \cdot (x,z) \in r_1 \cap (T \times S) \wedge (z,y) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \cap \} \\
 & \{(x,y) \mid \exists z \cdot (x,z) \in r_1 \wedge (x,z) \in (T \times S) \wedge (z,y) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \times \} \\
 & \{(x,y) \mid \exists z \cdot (x,z) \in r_1 \wedge x \in T \wedge z \in S \wedge (z,y) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ Hyp. } r_1 \in S \leftrightarrow S \text{ entraine } (x,z) \in r_1 \Rightarrow z \in S, \text{ LP-49 } \} \\
 & \{(x,y) \mid \exists z \cdot (x,z) \in r_1 \wedge (z,y) \in r_2 \wedge x \in T\} \\
= & \qquad \{ \text{ Hyp. } r_2 \in S \leftrightarrow S \text{ entraine } (z,y) \in r_2 \Rightarrow y \in S, \text{ LP-49 } \} \\
 & \{(x,y) \mid \exists z \cdot (x,z) \in r_1 \wedge (z,y) \in r_2 \wedge x \in T \wedge y \in S\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } ; \} \\
 & \{(x,y) \mid (x,y) \in r_1 \mathbin{;} r_2 \wedge x \in T \wedge y \in S\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \times \} \\
 & \{(x,y) \mid (x,y) \in r_1 \mathbin{;} r_2 \wedge (x,y) \in T \times S\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \cap \} \\
 & (r_1 \mathbin{;} r_2) \cap (T \times S)
\end{array}
$$

□

3. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante. Soit $r1 \in S \leftrightarrow S$, $r2 \in S \leftrightarrow S$, $T \subseteq S$, alors

$$\mathsf{dom}((r_1 \cap (T \times S)) \mathbin{;} r_2) \subseteq T$$

Solution:

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathsf{dom}((r_1 \cap (T \times S)) \mathbin{;} r_2) \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \mathsf{dom} \} \\
 & \{x \mid \exists y \cdot (x,y) \in (r_1 \cap (T \times S)) \mathbin{;} r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } ; \} \\
 & \{x \mid \exists y,z \cdot (x,z) \in r_1 \cap (T \times S) \wedge (z,y) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \cap \} \\
 & \{x \mid \exists y,z \cdot (x,z) \in r_1 \wedge (x,z) \in (T \times S) \wedge (z,y) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \times \} \\
 & \{x \mid \exists y,z \cdot (x,z) \in r_1 \wedge x \in T \wedge z \in S \wedge (z,y) \in r_2\} \\
\subseteq & \qquad \{ \text{ 3.53 et } \mathrm{E}_\wedge \} \\
 & \{x \mid \exists y,z \cdot x \in T\} \\
= & \qquad \{ \text{ LPO-32 } \} \\
 & \{x \mid x \in T\} \\
= & \\
 & T
\end{array}
$$

□

4. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante par induction sur les ensembles finis. Soit $B = \{0, 1\}$.

$$\forall A \cdot \mathsf{finite}(A) \Rightarrow \mathsf{card}(A \to B) = 2^{\mathsf{card}(A)}$$

Cette formule indique qu'il y a $2^{\mathsf{card}(A)}$ fonctions totales entre un ensemble fini A et l'ensemble $B = \{0, 1\}$.

Vous pouvez utiliser les lois suivantes pour faire la preuve.

$$\forall x \cdot x \notin A \wedge \mathsf{finite}(A) \Rightarrow \mathsf{card}((A \cup \{x\}) \to B) = 2 * \mathsf{card}(A \to B) \tag{1}$$

$$\varnothing \to B = \{\varnothing\} \tag{2}$$

Solution:
Preuve par induction sur A.
Cas de base: $A = \varnothing$.

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{card}(\varnothing \to B) \\
= & \qquad \{ \text{ (2) } \} \\
 & \mathsf{card}(\{\varnothing\}) \\
= & \qquad \{ \text{ singleton } \} \\
 & 1 \\
= & \qquad \{ \text{ arithmétique } \} \\
 & 2^0 \\
= & \qquad \{ \mathsf{card}(\varnothing) = 0 \} \\
 & 2^{\mathsf{card}(\varnothing)}
\end{array}$$

Cas d'induction: Supposons $\mathsf{finite}(A)$ et $A \neq \varnothing$. Soit $z \in A$ et $A_0 = A - \{z\}$. Puisque $A_0 \subset A$, voici l'hypothèse d'induction.

$$\mathsf{card}(A_0 \to B) = 2^{\mathsf{card}(A_0)} \qquad (\mathsf{HI})$$

Preuve du cas d'induction.

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{card}(A \to B) \\
= & \qquad \{ A = A_0 \cup \{z\} \} \\
 & \mathsf{card}((A_0 \cup \{z\}) \to B) \\
= & \qquad \{ z \notin A_0, \text{ (1) } \} \\
 & 2 * \mathsf{card}(A_0 \to B) \\
= & \qquad \{ (\mathsf{HI}) \} \\
 & 2 * 2^{\mathsf{card}(A_0)} \\
= & \qquad \{ \text{ arithmétique } \} \\
 & 2^{\mathsf{card}(A_0)+1} \\
= & \qquad \{ \mathsf{card}(A_0) + 1 = \mathsf{card}(A) \} \\
 & 2^{\mathsf{card}(A)}
\end{array}$$

□

5. (**10 pts**) Pour chaque relation ci-dessous, indiquez les propriétés qu'elle satisfait, en indiquant un X dans la case correspondante. On suppose que $r \in S \leftrightarrow S$ et $S = \{a, b\}$.

   Solution:

r	réflexive	irréflexive	transitive	symétrique	anti-symétrique	antisymétrique forte
{(a,b),(a,a),(b,b)}	X		X		X	
{(a,b),(b,a)}		X		X		
{(a,b)}		X	X		X	X
{}		X	X	X	X	X
S×S	X		X	X		

6. (**10 pts**) Soit $r \in S \leftrightarrow S$ et $T \neq \varnothing$ et $T \subset S$. Indiquez quelles sont les propriétés qui sont satisfaites, pour toute valeur de r, S et T.

   Voici un exemple, illustré sur la première ligne du tableau. L'expression $r \cup \mathsf{id}(S)$ est réflexive, pour toute valeur de r et S, car on a $\mathsf{id}(S) \subseteq r \cup \mathsf{id}(S)$; l'expression $r \cup \mathsf{id}(S)$ ne satisfait pas les autres propriétés pour toute valeur de r et S.

   Complétez la tableau ci-dessous.

   Solution:

expression	réflexive	irréflexive	transitive	symétrique	antisymétrique	anti-symétrique forte	équivalence	ordre
$r \cup \mathsf{id}(S)$	X							
r^*	X		X					
r^+			X					
$r \cup r^{-1}$				X				
$(r \cup r^{-1})^*$	X		X	X			X	
$r - \mathsf{id}(S)$		X						
$T \lhd r \rhd T$		X	X		X	X		
$(T \lhd r \rhd T)^+$		X	X		X	X		
$(T \lhd r \rhd T)^*$	X		X		X			X

7. (**10 pts**)

(a) Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{0, 1\}$. Pour chaque relation ci-dessous, déterminez à quelles classes de fonction elle appartient, en indiquant un X dans les cases appropriées.

Solution:

relation	$A ⇸ B$	$A \to B$	$A ⤔ B$	$A \rightarrowtail B$	$A ⤀ B$	$A \twoheadrightarrow B$	$A ⤗ B$	$A ⤖ B$
$\{(a,0),(b,1)\}$	X	X	X	X	X	X	X	X
$\{(a,0),(a,1)\}$								
$\{(a,0)\}$	X		X					
$\{(a,0),(b,0)\}$	X	X						

(b) Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. Pour chaque relation ci-dessous, déterminez à quelles classes de fonction elle appartient, en indiquant un X dans les cases appropriées.

Solution:

relation	$A ⇸ B$	$A \to B$	$A ⤔ B$	$A \rightarrowtail B$	$A ⤀ B$	$A \twoheadrightarrow B$	$A ⤗ B$	$A ⤖ B$
$\{(a,0),(b,1)\}$	X	X	X	X				
$\{(a,0),(a,1)\}$								
$\{(a,0)\}$	X		X					
$\{(a,0),(b,0)\}$	X	X						

(c) Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. Combien y a-t-il de fonctions dans la classe $A \twoheadrightarrow B$?

Solution: Aucune

(d) Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{0, 1\}$. Combien y a-t-il de fonctions dans la classe $A \rightarrowtail B$?

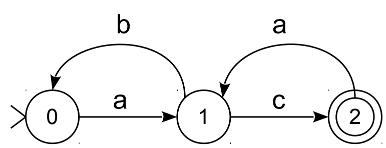
Solution: Aucune

8. (**10 pts**) À l'aide d'un graphe, définissez un automate déterministe pour chaque sous-question suivante. L'automate doit accepter seulement les suites décrites, et refuser toutes les autres suites. Par soucis de simplicité et de lisibilité, ne donnez pas l'état puits.

   (a) Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. La suite est une alternance entre un a et (un b ou un c). Autrement dit, un a est immédiatement suivi d'un b ou d'un c; un b est immédiatement suivi d'un a; un c est suivi d'un a ou bien il est le dernier symbole. Donc, une suite commence par a et se termine par un c. Voici quelques exemples de suites.

   $$[a, c], \quad [a, b, a, c], \quad [a, c, a, b, a, c]$$

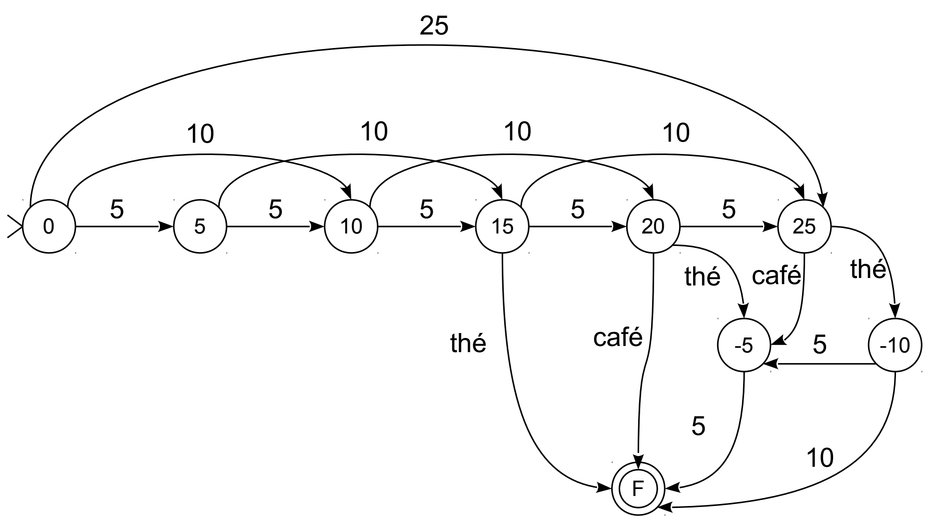
   Solution:



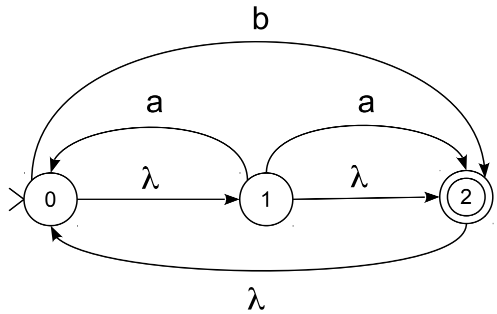
   (b) Soit $\Sigma = \{5, 10, 25, \textsf{thé}, \textsf{café}\}$. L'automate représente un distributeur automatique de café et de thé. Un café coûte 20 cents et un thé 15 cents. Le distributeur reçoit d'abord les pièces de 5, 10 et 25 cents pour payer la boisson; il n'accepte pas plus de 25 cents au total. L'utilisateur choisit ensuite un thé ou un café et le distributeur retourne la monnaie au besoin. Les états finaux sont ceux où la monnaie est rendue. Voici quelques exemples de suites.

   $$[10, 10, \textsf{thé}, 5], \quad [10, 10, \textsf{café}], \quad [25, \textsf{thé}, 10], \quad [25, \textsf{thé}, 5, 5], \quad [25, \textsf{café}, 5]$$

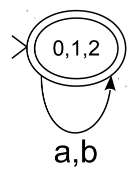
   Solution:



9. (**15 pts**) Déterminisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$



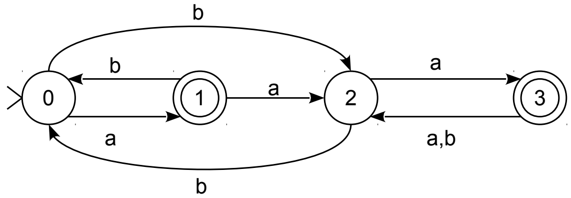
Solution:



$$\lambda\text{-closure} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

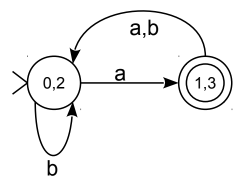
$$\begin{array}{rll} t = & \{ & ((0,a),0),((0,a),1),((0,a),2), \\ & & ((0,b),0),((0,b),1),((0,b),2), \\ & & ((1,a),0),((1,a),1),((1,a),2), \\ & & ((1,b),0),((1,b),1),((1,b),2), \\ & & ((2,a),0),((2,a),1),((2,a),2), \\ & & ((2,b),0),((2,b),1),((2,b),2) \\ & \} & \end{array}$$

10. (**15 pts**) Minimisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$.



Solution:

Paire	D	r	E
{0,1)	X		
{0,2)			X
{0,3)	X		
{1,2)	X		
{1,3}		(0,2)	X
{2,3}	X		



C'est fini!!! Joyeuses fêtes!!!