Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen final

Professeur : Marc Frappier

Mardi 12 décembre 2017, 9 h à 12 h
Salles : D7-2021, D7-3021

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Tout appareil électronique interdit.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- La note de l'examen est sur 100. Le total des points des questions donne 110. Votre note sera tronquée à 100 si elle dépasse 100. Vous pouvez répondre à toutes les questions.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 9.

Pondération :

Question	Point		Question	Point	
1	10		2	10	
3	10		4	10	
5	10		6	10	
7	10		8	10	
9	15		10	15	
			total	110	

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Signature : ______________________ Matricule : ______________________

1. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante par induction.

$$\forall n \cdot n \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 3i - 2 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Solution: Cas de base: $n = 1$.

$$
\begin{array}{ll}
 & \sum_{i=1}^{1} 3i - 2 \\
= & \quad \{ \text{ déf. de } \Sigma \} \\
 & 3 - 2 \\
= & \quad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & 1 \\
= & \quad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & \frac{3-1}{2}
\end{array}
$$

Cas d'induction: Soit $n > 1$. Voici l'hypothèse d'induction.

$$\sum_{i=1}^{n-1} 3i - 2 = \frac{(n-1)(3(n-1)-1)}{2} = \frac{(n-1)(3n-4)}{2} = \frac{3n^2-7n+4}{2} \qquad \text{(HI)}$$

Preuve du cas d'induction.

$$
\begin{array}{ll}
 & \sum_{i=1}^{n} 3i - 2 \\
= & \quad \{ \text{ déf. } \Sigma \} \\
 & (\sum_{i=1}^{n-1} 3i - 2) + 3n - 2 \\
= & \quad \{ \text{ (HI) } \} \\
 & \frac{3n^2-7n+4}{2} + 3n - 2 \\
= & \quad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & \frac{3n^2-7n+4+6n-4}{2} \\
= & \quad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & \frac{3n^2-n}{2} \\
= & \quad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & \frac{n(3n-1)}{2}
\end{array}
$$

$\square$

2. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante. Soit $r1 \in S \leftrightarrow S$, $r2 \in S \leftrightarrow S$, alors

$$(r_1 \cap r_2)^{-1} = r_1^{-1} \cap r_2^{-1}$$

Solution:

$$\begin{array}{ll}
 & (r_1 \cap r_2)^{-1} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } ^{-1} \} \\
 & \{(x, y) \mid (y, x) \in r_1 \cap r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \cap \text{ , 3.51 } \} \\
 & \{(x, y) \mid (y, x) \in r_1 \land (y, x) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } ^{-1} \text{ , 3.51 } \} \\
 & \{(x, y) \mid (x, y) \in r_1^{-1} \land (x, y) \in r_2^{-1}\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \cap \} \\
 & r_1^{-1} \cap r_2^{-1}
\end{array}$$

□

3. (**10 pts**) Soit la loi suivante:

$$f \in S \nrightarrow T \;\; \Rightarrow \;\; \forall x, y_1, y_2 \cdot x \mapsto y_1 \in f \land x \mapsto y_2 \in f \;\Rightarrow\; y_1 = y_2 \tag{1}$$

On désire prouver le théorème suivant. Soit $f \in S \nrightarrow T$, $r_1 \in S \leftrightarrow T$, $r_2 \in S \leftrightarrow T$, alors

$$f \,;(r_1 \cap r_2) = f \,; r_1 \cap f \,; r_2$$

Complétez la preuve ci-dessous en donnant les justifications manquantes.

$$\begin{array}{ll}
 & f \,; r_1 \cap f \,; r_2 \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \cap \} \\
 & \{(x, y) \mid (x, y) \in f \,; r_1 \land (x, y) \in f \,; r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } ; \text{ , (3.51) } \} \\
 & \{(x, y) \mid (\exists z_1 \cdot (x, z_1) \in f \land (z_1, y) \in r_1) \;\;\land\;\; (\exists z_2 \cdot (x, z_2) \in f \land (z_2, y) \in r_2)\} \\
= & \qquad \{ \text{ LPO-28 } \} \\
 & \{(x, y) \mid \exists z_1, z_2 \cdot (x, z_1) \in f \land (z_1, y) \in r_1 \land (x, z_2) \in f \land (z_2, y) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ LP-7 } \} \\
 & \{(x, y) \mid \exists z_1, z_2 \cdot (x, z_1) \in f \land (x, z_2) \in f \land (z_1, y) \in r_1 \land (z_2, y) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ hyp. } f \in S \nrightarrow T \text{ et (1) : } z_1 = z_2 \} \\
 & \{(x, y) \mid \exists z_1, z_2 \cdot (x, z_1) \in f \land (x, z_1) \in f \land (z_1, y) \in r_1 \land (z_1, y) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ LP-5 } \} \\
 & \{(x, y) \mid \exists z_1, z_2 \cdot (x, z_1) \in f \land (z_1, y) \in r_1 \land (z_1, y) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ LPO-32 } \} \\
 & \{(x, y) \mid \exists z_1 \cdot (x, z_1) \in f \land (z_1, y) \in r_1 \land (z_1, y) \in r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \cap \text{ , 3.51 } \} \\
 & \{(x, y) \mid \exists z_1 \cdot (x, z_1) \in f \land (z_1, y) \in r_1 \cap r_2\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } ; \} \\
 & f \,;(r_1 \cap r_2)
\end{array}$$

□

4. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante par induction sur les ensembles finis. Soit A et B deux ensembles finis.

$$\forall A, B \cdot \mathsf{finite}(A) \wedge \mathsf{finite}(B) \Rightarrow \mathsf{card}(A \to B) = \mathsf{card}(B)^{\mathsf{card}(A)}$$

Vous pouvez utiliser les lois suivantes pour faire la preuve.

$$\forall x \cdot x \notin C \wedge \mathsf{finite}(C) \Rightarrow \mathsf{card}((C \cup \{x\}) \to B) = \mathsf{card}(B) * \mathsf{card}(C \to B) \tag{2}$$

$$\varnothing \to B = \{\varnothing\} \tag{3}$$

Solution:
Preuve par induction sur A. Cas de base: $A = \varnothing$. On doit prouver

$$\mathsf{card}(\varnothing \to B) = \mathsf{card}(B)^{\mathsf{card}(\varnothing)}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{card}(\varnothing \to B) \\
= & \qquad \{ \ (3) \ \} \\
 & \mathsf{card}(\{\varnothing\}) \\
= & \qquad \{ \text{ singleton } \} \\
 & 1 \\
= & \qquad \{ \text{ arithmétique } \} \\
 & \mathsf{card}(B)^0 \\
= & \qquad \{ \ \mathsf{card}(\varnothing) = 0 \ \} \\
 & \mathsf{card}(B)^{\mathsf{card}(\varnothing)}
\end{array}$$

Cas d'induction: $A \neq \varnothing$. Soit $z \in A$ et $A_0 = A - \{z\}$. Puisque $A_0 \subset A$, voici l'hypothèse d'induction.

$$\mathsf{card}(A_0 \to B) = \mathsf{card}(B)^{\mathsf{card}(A_0)} \qquad (\mathsf{HI})$$

Preuve du cas d'induction.

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{card}(A \to B) \\
= & \qquad \{ \ A = A_0 \cup \{z\} \ \} \\
 & \mathsf{card}((A_0 \cup \{z\}) \to B) \\
= & \qquad \{ \ z \notin A_0, \ (2) \ \} \\
 & \mathsf{card}(B) * \mathsf{card}(A_0 \to B) \\
= & \qquad \{ \ (\mathsf{HI}) \ \} \\
 & \mathsf{card}(B) * \mathsf{card}(B)^{\mathsf{card}(A_0)} \\
= & \qquad \{ \text{ arithmétique } \} \\
 & \mathsf{card}(B)^{\mathsf{card}(A_0)+1} \\
= & \qquad \{ \ \mathsf{card}(A_0) + 1 = \mathsf{card}(A) \ \} \\
 & \mathsf{card}(B)^{\mathsf{card}(A)}
\end{array}$$

$\square$

5. (**10 pts**) Pour chaque relation ci-dessous, indiquez les propriétés qu'elle satisfait, en indiquant un X dans la case correspondante. On suppose que $r \in S \leftrightarrow S$ et $S = \{a, b\}$.

   Solution:

r	réflexive	irréflexive	transitive	symétrique	anti-symétrique	antisymétrique forte
{(a,a)}			X	X	X	
{(a,a),(b,b)}	X		X	X	X	
{(a,b),(b,a)}		X		X		
{(a,a),(b,b)},(a,b)}	X		X		X	
{(a,b)}		X	X		X	X

6. (**10 pts**) Soit $S = \{a, b, c\}$ et $r_1 = \{(a, b), (b, c)\}$.

   (a) Donnez la plus plus petite relation d'ordre $r_2 \in S \leftrightarrow S$ qui contient la relation r_1.
   Solution: $r_2 = r_1 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$

   (b) Donnez la plus petite relation d'équivalence $r_3 \in S \leftrightarrow S$ qui contient la relation r_1.
   Solution: $r_2 = r_1 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (b, c), (a, c), (c, a)\} = S \times S$

   (c) Donnez la plus grande relation antisymétrique forte $r_4 \in S \leftrightarrow S$ incluse dans la relation r_1.
   Solution: $r_4 = r_1$

   (d) Donnez la plus petite relation réflexive et transitive $r_5 \in S \leftrightarrow S$ qui contient la relation r_1.
   Solution: $r_5 = r_1 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$

7. (**10 pts**)

(a) Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{0, 1\}$. Pour chaque relation ci-dessous, déterminez à quelles classes de fonction elle appartient, en indiquant un X dans les cases appropriées.

Solution:

relation	$A \text{⇸} B$	$A \rightarrow B$	$A \text{⤔} B$	$A \rightarrowtail B$	$A \text{⤀} B$	$A \twoheadrightarrow B$	$A \text{⤗} B$	$A \text{⤖} B$
$\{(a, 0), (b, 0)\}$	X	X						
$\{(b, 0), (b, 1)\}$								
$\{(b, 0)\}$	X		X					
$\{(a, 1), (b, 1)\}$	X	X						

(b) Soit $A = \{a, b\}$. Pour chaque relation ci-dessous, déterminez à quelles classes de fonction elle appartient, en indiquant un X dans les cases appropriées.

Solution:

relation	$A \text{⇸} A$	$A \rightarrow A$	$A \text{⤔} A$	$A \rightarrowtail A$	$A \text{⤀} A$	$A \twoheadrightarrow A$	$A \text{⤗} A$	$A \text{⤖} A$
$\mathsf{id}(A)$	X	X	X	X	X	X	X	X
$A \times A$								
$A \times \{a\}$	X	X						
$\{(a, b), (b, a)\}$	X	X	X	X	X	X	X	X

(c) Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. Combien y a-t-il de fonctions dans la classe $A \rightarrow B$?

Solution: 27

(d) Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{0, 1\}$. Combien y a-t-il de fonctions dans la classe $A \rightarrowtail B$?

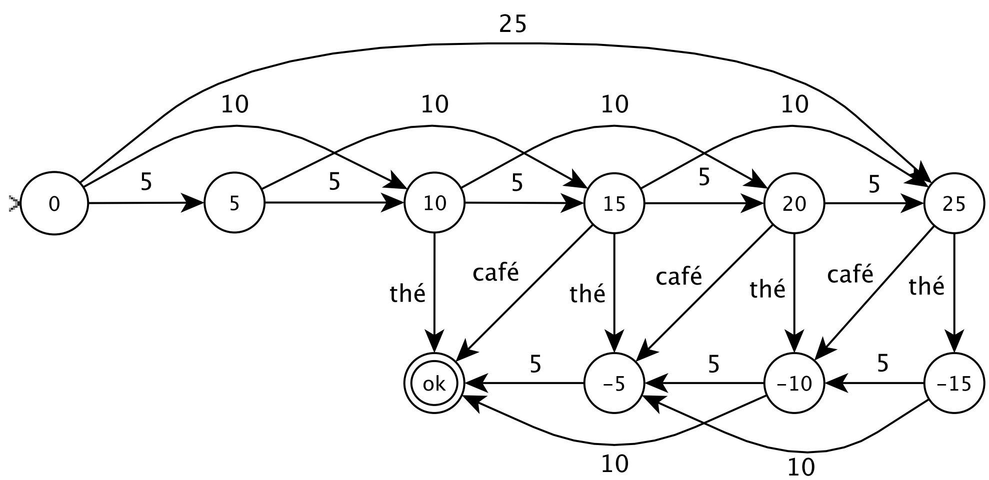
Solution: 2

8. (**10 pts**) À l'aide d'un graphe, définissez un automate déterministe pour chaque sous-question suivante. L'automate doit accepter seulement les suites décrites, et refuser toutes les autres suites. Par soucis de simplicité et de lisibilité, ne donnez pas l'état puits.

   (a) Soit $\Sigma = \{5, 10, 25, \textsf{thé}, \textsf{café}\}$. L'automate représente un distributeur automatique de café et de thé. Un café coûte 15 cents et un thé 10 cents. Le distributeur reçoit d'abord les pièces de 5, 10 et 25 cents pour payer la boisson; il n'accepte pas plus de 25 cents au total. L'utilisateur choisit ensuite un thé ou un café et le distributeur retourne la monnaie au besoin. Les états finaux sont ceux où la monnaie est rendue. Voici quelques exemples de suites.

$$[10, \textsf{thé}], \quad [10, 10, \textsf{café}, 5], \quad [25, \textsf{thé}, 10, 5], \quad [25, \textsf{thé}, 5, 10], \quad [25, \textsf{café}, 5, 5]$$

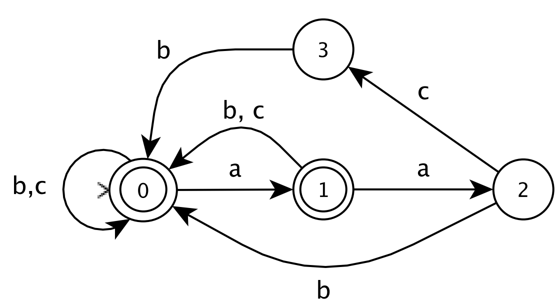
   Solution:



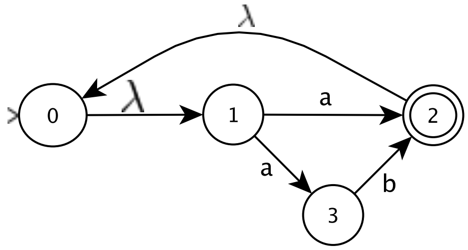
   (b) Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. Deux a consécutifs doivent obligatoirement être suivis soit d'un b, soit de $[c, b]$. Voici quelques exemples de suites.

$$[a, a, b], \quad [a, a, c, b], \quad [a, a, b, a, a, c, b, c], \quad [b, b], \quad [a, c, a, b, a, a, b, a]$$

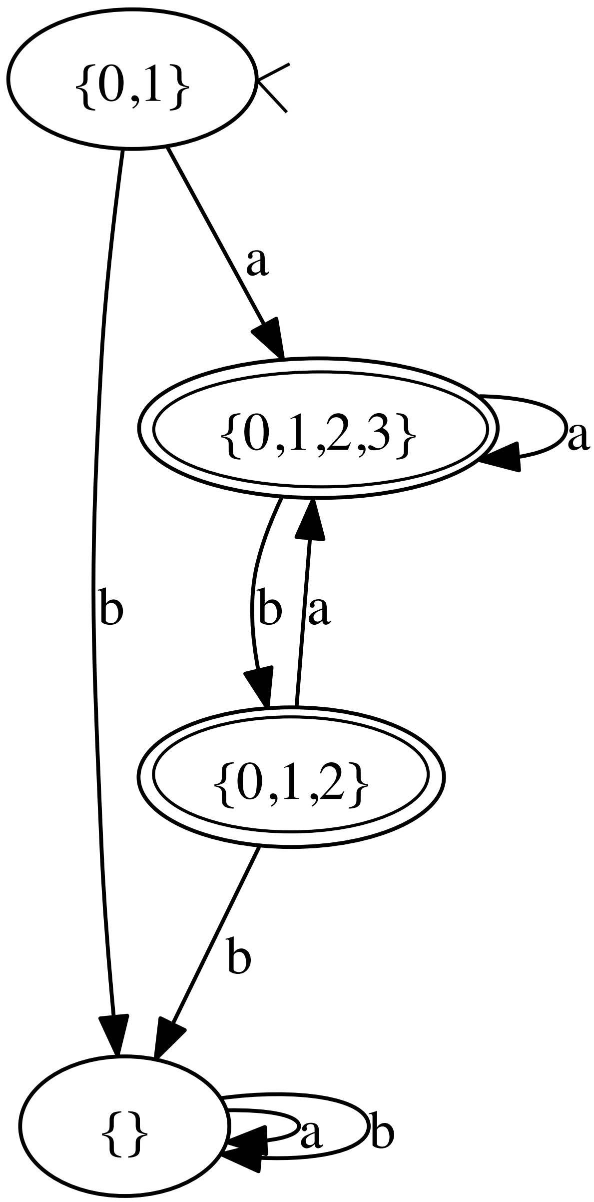
   Solution:



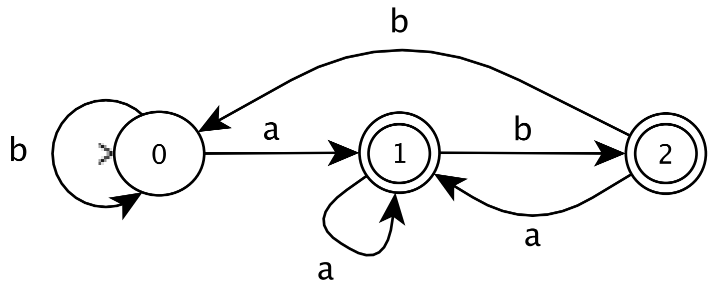
9. (**15 pts**) Déterminisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$.



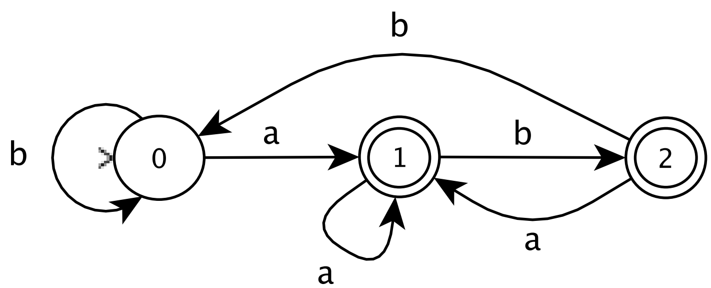
Solution:



10. (**15 pts**) Minimisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$.



Solution:



C'est fini!!! Joyeuses fêtes!!!