Université de Sherbrooke
Département de mathématiques

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen final

Professeur : Marc Frappier

Vendredi 21 décembre 2018, 9 h à 12 h
Salles : D3-2033, 38, 31, 37

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Tout appareil électronique interdit.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- La note de l'examen est sur 100. Le total des points des questions donne 110. Votre note sera tronquée à 100 si elle dépasse 100. Vous pouvez répondre à toutes les questions.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 8.

Pondération :

Question	Point	Résultat	Question	Point	Résultat
1	10		6	10	
2	10		7	10	
3	10		8	10	
4	10		9	15	
5	10		10	15	
			total	110	

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Signature : ______________________ CIP : ______________________

1. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante par induction.

$$\forall n \cdot n \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Solution: Cas de base: $n = 1$.

$$\begin{array}{ll}
 & \sum_{i=1}^{1} j^3 \\
= & \qquad \{ \text{ déf. de } \Sigma \ \} \\
 & 1^3 \\
= & \qquad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & 1 \\
= & \qquad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & \frac{1}{4}1^2 2^2
\end{array}$$

Cas d'induction: Soit $n > 1$. Voici l'hypothèse d'induction.

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2 \qquad \textsf{(HI)}$$

Preuve du cas d'induction.

$$\begin{array}{ll}
 & \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \Sigma \ \} \\
 & (\sum_{i=1}^{n-1} i^3) + n^3 \\
= & \qquad \{ \ \textsf{(HI)} \ \} \\
 & \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2 + n^3 \\
= & \qquad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2 + nn^2 \\
= & \qquad \{ \text{ Distributivité } \} \\
 & (\frac{1}{4}(n-1)^2 + n)n^2 \\
= & \qquad \{ \text{ Dénominateur commun } \} \\
 & \frac{(n-1)^2+4n}{4}n^2 \\
= & \qquad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & \frac{n^2-2n+1+4n}{4}n^2 \\
= & \qquad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & \frac{n^2+2n+1}{4}n^2 \\
= & \qquad \{ \text{ Arithmétique } \} \\
 & \frac{1}{4}n^2(n+1)^2
\end{array}$$

$\square$

2. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante. Soit $r \in S \leftrightarrow S$, $T \subseteq S$, alors

$$\mathsf{id}(T) \mathbin{;} r = r \cap T \times S$$

Utilisez la définition suivante de l'identité, pour simplifier votre preuve.

$$\mathsf{id}(T) = \{(x, y) \mid x \in T \wedge x = y\} \tag{1}$$

Solution:

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{id}(T) \mathbin{;} r \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } ; \} \\
 & \{(x, y) \mid \exists z \cdot (x, z) \in \mathsf{id}(T) \wedge (z, y) \in r\} \\
= & \qquad \{ \text{ (1) et ((3.52) ou (LE-5)) } \} \\
 & \{(x, y) \mid \exists z \cdot x \in T \wedge x = z \wedge (z, y) \in r\} \\
= & \qquad \{ \text{ LPO-2 } \} \\
 & \{(x, y) \mid x \in T \wedge (x, y) \in r\} \\
= & \qquad \{ (x, y) \in r \wedge r \in S \leftrightarrow S \Rightarrow y \in S, \text{ LP-49 } \} \\
 & \{(x, y) \mid x \in T \wedge (x, y) \in r \wedge y \in S\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \times \text{ et ((3.52) ou (LE-5)) } \} \\
 & \{(x, y) \mid (x, y) \in T \times S \wedge (x, y) \in r\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \cap \} \\
 & T \times S \cap r
\end{array}$$

□

3. (**10 pts**) On désire prouver le théorème suivant :

$$f \in S \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} T \Rightarrow (\forall x, y, z \cdot (z, x) \in f \wedge (z, y) \in f \Rightarrow x = y)$$

Complétez la preuve ci-dessous en donnant les justifications manquantes ou les étapes manquantes.

Solution:

$$\begin{array}{ll}
 & f \in S \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} T \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ déf. } \mathrel{+\!\!\!\rightarrow} \} \\
 & f^{-1} \mathbin{;} f \subseteq \mathsf{id}(T) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ déf. } \subseteq \} \\
 & \forall x, y \cdot (x, y) \in f^{-1} \mathbin{;} f \Rightarrow (x, y) \in \mathsf{id}(T) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ déf. ; et ((3.52) ou (LE-5)) } \} \\
 & \forall x, y \cdot (\exists z \cdot (x, z) \in f^{-1} \wedge (z, y) \in f) \Rightarrow (x, y) \in \mathsf{id}(T) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ déf. } ^{-1} \text{ et ((3.52) ou (LE-5)) } \} \\
 & \forall x, y \cdot (\exists z \cdot (z, x) \in f \wedge (z, y) \in f) \Rightarrow (x, y) \in \mathsf{id}(T) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ déf. } \mathsf{id} \text{ et ((3.52) ou (LE-5)) } \} \\
 & \forall x, y \cdot (\exists z \cdot (z, x) \in f \wedge (z, y) \in f) \Rightarrow x = y \wedge x \in T \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LPO-27 } \} \\
 & \forall x, y, z \cdot (z, x) \in f \wedge (z, y) \in f \Rightarrow x = y \wedge x \in T \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-33 } \} \\
 & \forall x, y, z \cdot ((z, x) \in f \wedge (z, y) \in f \Rightarrow x = y) \wedge ((z, x) \in f \wedge (z, y) \in f \Rightarrow x \in T) \\
\Rightarrow & \qquad \{ \text{ E}_\wedge \} \\
 & \forall x, y, z \cdot (z, x) \in f \wedge (z, y) \in f \Rightarrow x = y
\end{array}$$

□

4. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante par induction sur les ensembles finis. Soit S un ensemble.

$$\forall A \cdot A \in \mathbb{F}(S) \;\Rightarrow\; \mathsf{card}(A \rightarrowtail A) = \mathsf{card}(A)!$$

L'opérateur "!" est appelé la factorielle et il est défini comme suit:

$$0! = 1 \tag{2}$$
$$n > 0 \;\Rightarrow\; n! = n * (n-1)! \tag{3}$$

Par exemple, $3! = 3 * 2 * 1 = 6$

Vous pouvez utiliser les deux lois suivantes pour faire la preuve.

$$\varnothing \rightarrowtail \varnothing = \{\varnothing\} \tag{4}$$

$$\begin{array}{l} \forall B, x \cdot \\ \quad x \notin B \land \mathsf{finite}(B) \\ \Rightarrow \\ \quad \mathsf{card}\big((B \cup \{x\}) \rightarrowtail (B \cup \{x\})\big) = (\mathsf{card}(B) + 1) * \mathsf{card}(B \rightarrowtail B) \end{array} \tag{5}$$

Solution:
Preuve par induction sur A. Cas de base: $A = \varnothing$. On doit prouver

$$\mathsf{card}(\varnothing \rightarrowtail \varnothing) = \mathsf{card}(\varnothing)!$$

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{card}(\varnothing \rightarrowtail \varnothing) \\ = & \qquad \{ \ (4) \ \} \\ & \mathsf{card}(\{\varnothing\}) \\ = & \qquad \{ \text{ déf. } \mathsf{card} \ \} \\ & 1 \\ = & \qquad \{ \text{ déf. } ! \ \} \\ & 0! \end{array}$$

Cas d'induction: $A \neq \varnothing$. Soit $z \in A$ et $A_0 = A - \{z\}$. Puisque $A_0 \subset A$, voici l'hypothèse d'induction.

$$\mathsf{card}(A_0 \rightarrowtail A_0) = \mathsf{card}(A_0)! \qquad (\mathsf{HI})$$

Preuve du cas d'induction.

$$\begin{array}{ll} & \mathsf{card}(A \rightarrowtail A) \\ = & \qquad \{ \ A = A_0 \cup \{z\} \ \} \\ & \mathsf{card}((A_0 \cup \{z\}) \rightarrowtail (A_0 \cup \{z\})) \\ = & \qquad \{ \ (5) \ \} \\ & (\mathsf{card}(A_0) + 1) * \mathsf{card}(A_0 \rightarrowtail A_0) \\ = & \qquad \{ \ (\mathsf{HI}) \ \} \\ & (\mathsf{card}(A_0) + 1) * \mathsf{card}(A_0)! \\ = & \qquad \{ \ (3) \ \} \\ & (\mathsf{card}(A_0) + 1)! \\ = & \qquad \{ \ \mathsf{card}(A_0) + 1 = \mathsf{card}(A) \ \} \\ & \mathsf{card}(A)! \end{array}$$

$\square$

5. (**10 pts**) Pour chaque relation ci-dessous, indiquez les propriétés qu'elle satisfait, en indiquant un X dans la case correspondante. On suppose que $r \in S \leftrightarrow S$ et $S = \{a, b\}$.

Solution:

r	réflexive	irréflexive	transitive	symétrique	anti-symétrique	asymétrique
id(S)	X		X	X	X	
S × S	X		X	X		
{a} × S			X		X	
{a} × {b}		X	X		X	X
{(a,b),(b,b)}			X		X	

6. (**10 pts**)

   (a) Est-ce que la relation suivante est bien fondée? Justifiez votre réponse.

   $$\{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x = y + 1\}$$

   Solution: Non, car la suite suivante est infinie : $\ldots, 2, 1, 0$

   (b) Est-ce que la relation suivante est acyclique? Justifiez votre réponse.

   $$\{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x * y = 12\}$$

   Solution: Non, car on a le cycle suivant : $2, 6, 2$

7. (**10 pts**) Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{0, 1\}$. Pour chaque relation ci-dessous, déterminez à quelles classes de fonction elle appartient, en indiquant un X dans les cases appropriées.

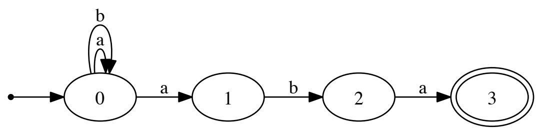
   Solution:

relation	$A ⇸ B$	$A \rightarrow B$	$A ⤔ B$	$A \rightarrowtail B$	$A ⤀ B$	$A \twoheadrightarrow B$	$A ⤗ B$	$A ⤖ B$
$\{(a,0),(b,0)\}$	X	X						
$\{(b,0),(b,1)\}$								
$\{(b,0)\}$	X		X					
$\{(a,1),(b,2)\}$								

8. (**10 pts**)

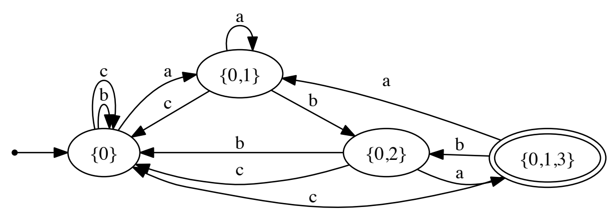
(a) Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez le graphe d'un automate non-déterministe qui accepte seulement les mots se terminant par *aba*.

Solution:

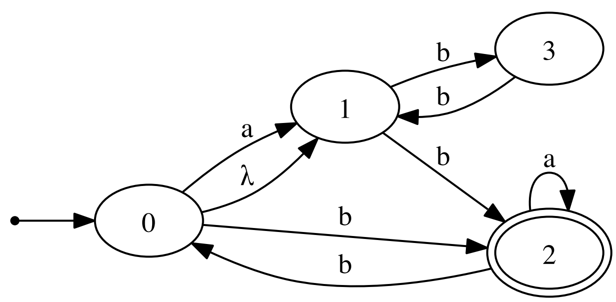


(b) Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. Donnez le graphe d'un automate déterministe qui accepte seulement les mots se terminant par *aba* (i.e., le même langage que pour la question précédente). Par soucis de simplicité et de lisibilité, il n'est pas nécessaire de donner l'état puits.

Solution:

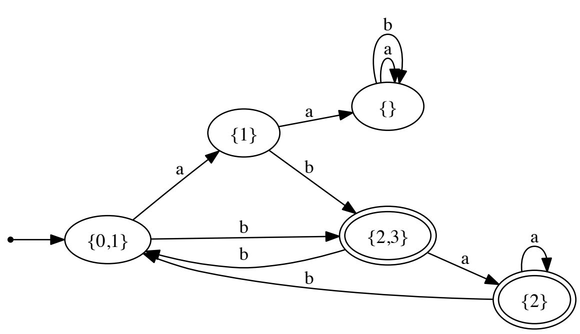


9. (**15 pts**) Déterminisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$.

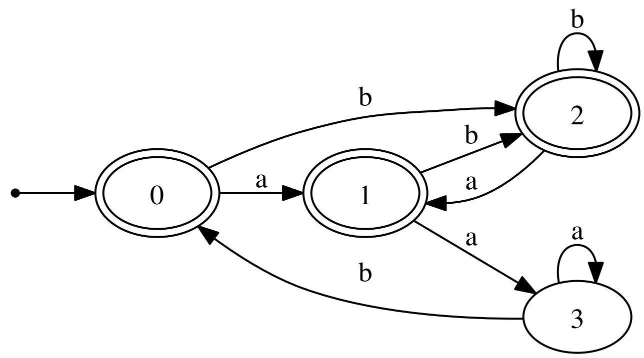


Dessinez l'automate déterministe ici. Ne donnez pas t et λ-closure. Donnez l'état puits.

Solution:

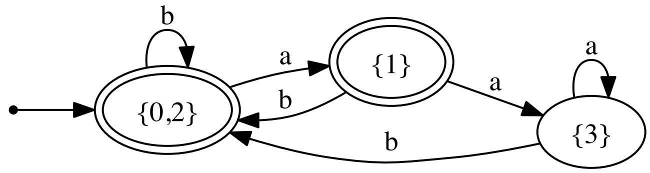


10. (**15 pts**) Minimisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$.



Dessinez l'automate minimal équivalent ici.

Solution:



C'est fini!!! Joyeuses fêtes!!!