Université de Sherbrooke
Département de mathématiques

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen final

Professeur : Marc Frappier

Mercredi 18 décembre 2019, 9 h à 12 h
Salles : D3-2033, D3-2035, D3-2037

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Tout appareil électronique interdit.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- La note de l'examen est sur 100. Le total des points des questions donne 110. Votre note sera tronquée à 100 si elle dépasse 100. Vous pouvez répondre à toutes les questions.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 8.

Pondération :

Question	Point	Résultat
1	10	
2	15	
3	15	
4	10	
5	10	

Question	Point	Résultat
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
total	110	

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Signature : ______________________ CIP : ______________________

1. (**10 pts**) Prouvez la formule suivante par induction.

$$\forall n \cdot n \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$$

Solution: Cas de base: $n = 1$.

$$\begin{array}{ll} & \displaystyle\sum_{i=0}^{0} 2^i \\ = & \qquad \{ \text{ déf. de } \Sigma \text{ } \} \\ & 2^0 \\ = & \qquad \{ \text{ Arithmétique } \} \\ & 1 \\ = & \qquad \{ \text{ Arithmétique } \} \\ & 2^1 - 1 \end{array}$$

Cas d'induction: Soit $n > 1$. Voici l'hypothèse d'induction.

$$\sum_{i=0}^{n-2} 2^i = 2^{n-1} - 1 \qquad \textsf{(HI)}$$

Preuve du cas d'induction.

$$\begin{array}{ll} & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\ = & \qquad \{ \text{ déf. } \Sigma \text{ } \} \\ & (\displaystyle\sum_{i=0}^{n-2} 2^i) + 2^{n-1} \\ = & \qquad \{ \text{ } \textsf{(HI)} \text{ } \} \\ & (2^{n-1} - 1) + 2^{n-1} \\ = & \qquad \{ \text{ Arithmétique } \} \\ & 2(2^{n-1}) - 1 \\ = & \qquad \{ \text{ def. } a^n = a(a^{n-1} \text{ pour } n > 0 \text{ } \} \\ & 2^n - 1 \end{array}$$

□

2. (**15 pts**) Prouvez la formule suivante par induction sur les ensembles finis. Soit S un ensemble.

$$\forall A \cdot A \in \mathbb{F}(S) \;\Rightarrow\; (\forall B \cdot B \in \mathbb{F}(S) \;\Rightarrow\; \mathsf{card}(A \cap B) \leq \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B))$$

Vous pouvez utiliser al loi suivante.

$$\mathsf{card}(\{z\} \cap B) \leq 1 \tag{1}$$

Solution:
Preuve par induction sur A. Cas de base: $A = \varnothing$. On doit prouver

$$\mathsf{card}(\varnothing \cap B) \leq \mathsf{card}(\varnothing) + \mathsf{card}(B)$$

. Soit $B \in \mathbb{F}(S)$.

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{card}(\varnothing \cap B) \\
= & \qquad \{ \text{ déf. de } \cap \ \} \\
 & \mathsf{card}(\{\varnothing\}) \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \mathsf{card} \ \} \\
 & 0 \\
\leq & \qquad \{ \text{ déf. } \mathsf{card} \ \} \\
 & \mathsf{card}(\varnothing) + \mathsf{card}(B)
\end{array}$$

Cas d'induction: $A \neq \varnothing$. Soit $z \in A$ et $A_0 = A - \{z\}$. Puisque $A_0 \subset A$, voici l'hypothèse d'induction.

$$\mathsf{card}(A_0 \cap B) \leq \mathsf{card}(A_0) + \mathsf{card}(B) \qquad (\mathsf{HI})$$

Soit $B \in \mathbb{F}(S)$. Preuve du cas d'induction.

$$\begin{array}{ll}
 & \mathsf{card}(A \cap B) \\
= & \qquad \{ \ A = A_0 \cup \{z\} \ \} \\
 & \mathsf{card}((A_0 \cup \{z\}) \cap B) \\
= & \qquad \{ \text{ distributivité } \} \\
 & \mathsf{card}((A_0 \cap B) \cup (\{z\} \cap B)) \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \mathsf{card} \text{ pour } \cup \ \} \\
 & \mathsf{card}(A_0 \cap B) + \mathsf{card}(\{z\} \cap B) - \mathsf{card}((A_0 \cap B \cap \{z\} \cap B)) \\
= & \qquad \{ \text{ intersection vide, car } z \notin A_0 \ \} \\
 & \mathsf{card}(A_0 \cap B) + \mathsf{card}(\{z\} \cap B) \\
\leq & \qquad \{ \ (\mathsf{HI}) \ \} \\
 & \mathsf{card}(A_0) + \mathsf{card}(B) + \mathsf{card}(\{z\} \cap B) \\
\leq & \qquad \{ \ (1) \ \} \\
 & \mathsf{card}(A_0) + \mathsf{card}(B) + 1 \\
= & \qquad \{ \ \mathsf{card}(A_0) + 1 = \mathsf{card}(A) \ \} \\
 & \mathsf{card}(A) + \mathsf{card}(B)
\end{array}$$

$\square$

3. (**15 pts**) Soit S un ensemble. Prouvez la formule suivante.

$$(S \times S) \,;\, (S \times S) = S \times S$$

Vous pouvez utiliser la loi suivante pour cette preuve

$$x \in S \land \exists z \cdot z \in S \quad \Leftrightarrow \quad x \in S \tag{2}$$

Solution:

$$
\begin{array}{ll}
 & (S \times S) \,;\, (S \times S) \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } ; \} \\
 & \{(x,y) | \exists z \cdot (x,z) \in S \times S \land (z,y) \in S \times S\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \times \} \\
 & \{(x,y) | \exists z \cdot x \in S \land z \in S \land z \in S \land y \in S \land\} \\
= & \qquad \{ \text{ LP-5 } \} \\
 & \{(x,y) | \exists z \cdot x \in S \land z \in S \land y \in S\} \\
= & \qquad \{ \text{ LP0-28 } \} \\
 & \{(x,y) | (x \in S \land \exists z \cdot z \in S) \land y \in S\} \\
= & \qquad \{ \text{ (2) } \} \\
 & \{(x,y) | x \in S \land y \in S\} \\
= & \qquad \{ \text{ déf. } \times \} \\
 & S \times S
\end{array}
$$

□

4. (**10 pts**)

(a) Soit $S = \{c, d\}$. Pour chaque relation sur S ci-dessous, indiquez les propriétés qu'elle satisfait, en indiquant un X dans la case correspondante.

Solution:

Relation	réflexive	irréflexive	transitive	symétrique	antisymétrique	asymétrique
$\{(c,c),(d,d)\}$	X		X	X	X	
$\{(c,d),(d,c)\}$		X		X		

(b) Soit les relations suivantes sur les nombres naturels ($\mathbb{N}$). indiquez les propriétés qu'elle satisfait, en indiquant un X dans la case correspondante.

Solution:

Relation	réflexive	irréflexive	transitive	symétrique	antisymétrique	asymétrique
$<$		X	X		X	X
$\leq$	X		X		X	
$\neq$		X		X		

5. (**10 pts**)

(a) Est-ce que la relation suivante est bien fondée? Justifiez votre réponse.

$$\{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N} \land y = x + 1\}$$

Solution: Oui, car c'est un sous-ensemble de la relation $<$.

(b) Est-ce que la relation $\mathsf{fraterie}$, définie sur les personnes, est acyclique? Justifiez votre réponse.

$$\mathsf{fraterie} = \{(x, y) \mid x \text{ est un frère ou une soeur de } y\}$$

Solution: Non, car est elle symétrique, donc il y a le cycle $p1, p2, p1$, où $p1$ et $p2$ sont des frères ou des soeurs.

6. (**10 pts**) Soit les fonctions suivantes. Indiquez à quelle classe elle appartient en cochant la case appropriée.

$$f_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge y = x + 1\}$$

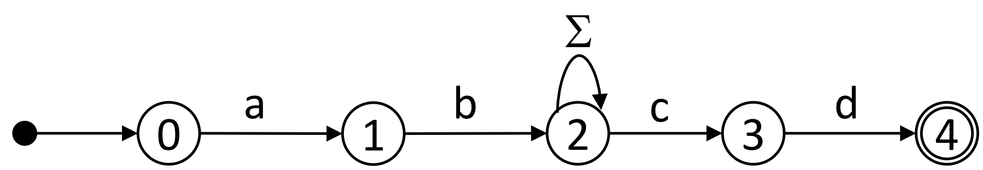
$$f_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge y = x - x\}$$

Solution:

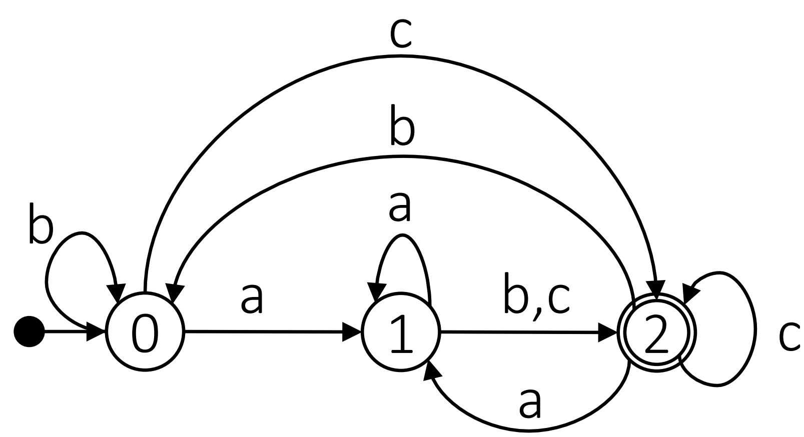
$fonction$	$\mathbb{N} \nrightarrow \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!\nrightarrow \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\nrightarrow \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\nrightarrow \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$
f_1				X				
f_2		X						

7. (**10 pts**)

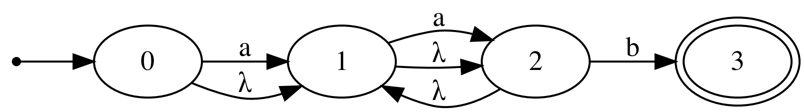
(a) Soit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Donnez le graphe d'un automate **non-déterministe** qui accepte seulement les mots qui commencent par ab et se termine par cd.
Solution:



(b) Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. Donnez le graphe d'un automate **déterministe** qui accepte seulement les mots se terminant par ab ou c. Il n'est pas nécessaire de donner l'état puits.
Solution:

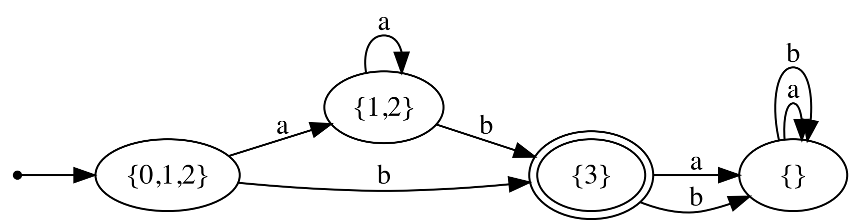


8. (**10 pts**) Déterminisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$.

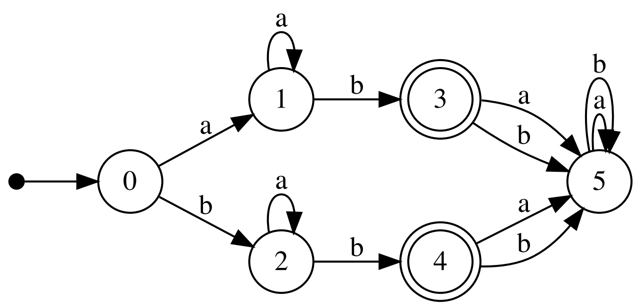


Dessinez seulement l'automate déterministe ici. Ne donnez pas t et λ-closure. Donnez l'état puits.

Solution:



9. (**10 pts**) Minimisez l'automate suivant, en supposant que $\Sigma = \{a, b\}$.



Donnez la valeur du tableau, comme indiqué dans les notes de cours.

Solution:

Paire	D	r	E
{0,1}	X		
{0,2}	X		
{0,3}	X		
{0,4}	X		
{0,5}	X		
{1,2}			X
{1,3}	X		
{1,4}	X		
{1,5}	X	{0,5}	
{2,3}	X		
{2,4}	X		
{2,5}	X	{0,5}	
{3,4}		{1,2}	X
{3,5}	X		
{4,5}	X		

Dessinez l'automate minimal équivalent ici.

Solution: