Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen périodique

Professeur : Marc Frappier

Lundi 5 otobre 2015, 8h30 à 11h20
Salles : D3-2041, D4-2019

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.

Pondération :

Question	Point
1	30
2	15
3	10
4	10
5	10
6	15
7	10
total	100

Nom : ____________________ Prénom : ____________________

Signature : ____________________ Matricule : ____________________

1. (**30 pt**) Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Numérotez chaque hypothèse déchargée avec le numéro de l'étape où elle est déchargée (comme dans Panda). Indiquez chaque règle d'inférence utilisée.

   (a) $\vdash (a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg(a \wedge \neg b)$
   Solution:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\mathbf{a}\to\mathbf{b})^{(1)}$}
\AxiomC{$(\mathbf{a}\wedge\neg\mathbf{b})^{(2)}$}
\RightLabel{$(E\wedge)$}
\UnaryInfC{$\mathbf{a}$}
\RightLabel{$(E\to)$}
\BinaryInfC{$\mathbf{b}$}
\AxiomC{$(\mathbf{a}\wedge\neg\mathbf{b})^{(2)}$}
\RightLabel{$(E\wedge)$}
\UnaryInfC{$\neg\mathbf{b}$}
\RightLabel{$(I\bot)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(I\neg)(2)$}
\UnaryInfC{$\neg(\mathbf{a}\wedge\neg\mathbf{b})$}
\RightLabel{$(I\to)(1)$}
\UnaryInfC{$((\mathbf{a}\to\mathbf{b})\to\neg(\mathbf{a}\wedge\neg\mathbf{b}))$}
\end{prooftree}
$$

   (b) $\vdash (a \vee (\neg a \wedge b)) \Rightarrow (a \vee b)$
   Solution:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\mathbf{a}\vee(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))^{(1)}$}
\AxiomC{$\mathbf{a}^{(2)}$}
\RightLabel{$(I\vee)$}
\UnaryInfC{$(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})$}
\AxiomC{$(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{(3)}$}
\RightLabel{$(E\wedge)$}
\UnaryInfC{$\mathbf{b}$}
\RightLabel{$(I\vee)$}
\UnaryInfC{$(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})$}
\RightLabel{$(E\vee)(2)(3)$}
\TrinaryInfC{$(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})$}
\RightLabel{$(I\to)(1)$}
\UnaryInfC{$((\mathbf{a}\vee(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))\to(\mathbf{a}\vee\mathbf{b}))$}
\end{prooftree}
$$

   (c) $\vdash (a \vee \neg a) \Rightarrow ((a \vee b) \Rightarrow (a \vee (\neg a \wedge b)))$
   Solution:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})^{(2)}$}
\AxiomC{$\mathbf{a}^{(3)}$}
\RightLabel{$(I\vee)$}
\UnaryInfC{$(\mathbf{a}\vee(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))$}
\AxiomC{$(\mathbf{a}\vee\neg\mathbf{a})^{(1)}$}
\AxiomC{$\mathbf{a}^{(5)}$}
\RightLabel{$(I\vee)$}
\UnaryInfC{$(\mathbf{a}\vee(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))$}
\AxiomC{$\neg\mathbf{a}^{(6)}$}
\AxiomC{$\mathbf{b}^{(4)}$}
\RightLabel{$(I\wedge)$}
\BinaryInfC{$(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$}
\RightLabel{$(I\vee)$}
\UnaryInfC{$(\mathbf{a}\vee(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))$}
\RightLabel{$(E\vee)(5)(6)$}
\TrinaryInfC{$(\mathbf{a}\vee(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))$}
\RightLabel{$(E\vee)(3)(4)$}
\TrinaryInfC{$(\mathbf{a}\vee(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))$}
\RightLabel{$(I\to)(2)$}
\UnaryInfC{$((\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\to(\mathbf{a}\vee(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})))$}
\RightLabel{$(I\to)(1)$}
\UnaryInfC{$((\mathbf{a}\vee\neg\mathbf{a})\to((\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\to(\mathbf{a}\vee(\neg\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}))))$}
\end{prooftree}
$$

2. (**15 pt**) Traduisez les énoncés suivants avec le langage de Tarski.

   (a) Il existe un cube petit et un tétraèdre petit qui sont situés à gauche de tous les autres objets grands.

   Solution:

```
∃x∃y
  (
    Cube(x) ∧ Small(x) ∧ Tet(y) ∧ Small(y) ∧
    ∀z
      (
        (z ≠ x ∧ z ≠ y ∧ Large(z))
      →
        (LeftOf(x, z) ∧ LeftOf(y, z))
      )
  )
```

   (b) Tous les cubes sont petits ssi tous les tétraèdres sont à gauche des cubes.

   Solution:

```
  (∀x (Cube(x) → Small(x)))
↔
  (∀x∀y ((Tet(x) ∧ Cube(y)) → LeftOf(x, y)))
```

   (c) Le cube a est le plus grand des cubes. Vous ne pouvez pas utiliser un quantificateur $\exists$ pour cette question. Utilisez le prédicat Smaller(x, y) qui retourne vrai ssi x est plus petit que y.

   Solution:

```
Cube(a) ∧ ∀x((Cube(x) ∧ x ≠ a) → Smaller(x, a))
```

   (d) Le cube a est le plus grand des cubes. Vous ne pouvez pas utiliser un quantificateur $\forall$ pour cette question. Utilisez le prédicat Smaller(x, y).

   Solution:

```
Cube(a) ∧ ¬∃x (Cube(x) ∧ x ≠ a ∧ ¬Smaller(x, a))
```

3. (**10 pt**) Considérez les formules suivantes

$$\neg(X_1 \wedge X_2) \Leftrightarrow X_3 \tag{1}$$

$$\neg X_1 \tag{2}$$

$$X_2 \tag{3}$$

(a) Calculez la table de vérité pour ces trois formules.

Solution:

no	X1	X2	X3	¬(	X1	∧	X2)	⇔	X3	¬	X1	X2
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
4	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
5	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
6	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
8	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1

(b) Existe-t-il un modèle pour ces trois formules? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 4.

(c) Est-ce que la formule (3) est une conséquence logique de (1) et (2)? Justifiez.

Solution: Non, à cause de la ligne 2.

(d) Est-ce que ces 3 formules sont cohérentes? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 4 est un modèle.

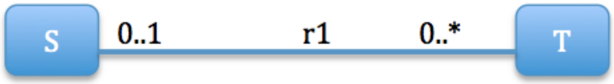
4. (**10 pt**) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive. Prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Donnez la formule la plus simple possible. Justifiez chaque étape de votre preuve.

$$\neg(\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge \neg(X_3 \wedge X_4)$$

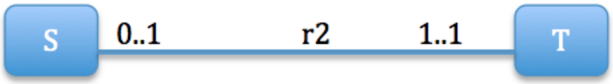
Solution:

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge \neg(X_3 \wedge X_4) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-18 } \} \\
 & (\neg\neg X_1 \wedge \neg\neg X_2) \wedge \neg(X_3 \wedge X_4) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-17 } \} \\
 & (\neg\neg X_1 \wedge \neg\neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-21 deux fois } \} \\
 & (X_1 \wedge X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_4) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-11 } \} \\
 & X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3 \vee X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_4
\end{array}$$

5. (**10 pt**) Donnez une formule pour représenter les contraintes sur les associations r1 et r2.

(a) 

Solution: `r1 : T +-> S`

(b) 

Solution: `r2 : S >-> T`

6. (**15 pt**) Soit les définitions suivantes:

```
MACHINE q5
SETS
 S={s1,s2,s3,s4}; T={t1,t2,t3}; U={u1,u2,u3}

CONSTANTS r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,S1,T1

PROPERTIES
 r1 = {s1|->t1, s1|->t2, s2|->t1, s3|->t3} &
 r2 = {t1|->u1,t2|->u2} &
 r3 = {s1|->s2, s2|->s3, s2|->s4, s3|->s4} &
 r4 = (r1;r2) &
 r5 = {s1}<|r1 &
 r6 = r1|>{t1} &
 r7 = r1|>>{t1} &
 r8 = closure1(r3) &
 r9 = (r1;r1~)-id(S) &
 r10 = r1 <+ {s1|->t3} &
 r11 = iterate(r3,4) &
 S1 = dom(r1) &
 T1 = ran(r1)
END
```

Donnez la valeur des expressions suivantes:

(a) `r4`
Solution: `{(s1|->u1),(s1|->u2),(s2|->u1)}`

(b) `r5`
Solution: `{(s1|->t1),(s1|->t2)}`

(c) `r6`
Solution: `{(s1|->t1),(s2|->t1)}`

(d) `r7`
Solution: `{(s1|->t2),(s3|->t3)}`

(e) `r8`
Solution: `{(s1|->s2),(s1|->s3),(s1|->s4),(s2|->s3),(s2|->s4),(s3|->s4)}`

(f) `r9`
Solution: `{(s1|->s2),(s2|->s1)}`

(g) `r10`
Solution: `{(s1|->t3),(s2|->t1),(s3|->t3)}`

(h) `r11`
Solution: `{}`

(i) `S1`
Solution: `{s1,s2,s3}`

(j) `T1`
Solution: `{t1,t2,t3}`

7. (**10 pt**) Soit les définitions suivantes inspirées du devoir 2.

```
SETS
  Personne={h1,h2,h3,h4,h5,f1,f2,f3,f4,f5};
CONSTANTS
  Homme,Femme,Pere,Mere,Parent,
PROPERTIES
  Homme={h1,h2,h3} &
  Femme={f1,f2,f3} &
  Pere={h1|->h2,h1|->f2,h2|->h3} &
  Mere={f2|->h3} &
  Parent = Pere \/ Mere
```

(a) Définissez par compréhension la relation Consanguin, qui contient les paires $x \mapsto y$ telles que x a eu un enfant avec y et x et y ont un parent en commun.

Solution: `Consaguin = {x|->y | x /= y & #(z1,z2).`
`(z1|->x : Parent & z1|->y : Parent & x|->z2 : Parent & y|->z2 : Parent)}`

(b) Définissez, en utilisant des opérations sur les relations et les ensembles, et sans utiliser la définition par compréhension, la relation Consanguin2, qui contient les mêmes paires que Consanguin.

Solution: `Consanguin2 = ((Parent~ ;Parent) /\ (Parent;Parent~ )) - id(Personne)`