Université de Sherbrooke
Département d'informatique

MAT115 : Logique et mathématiques discrètes

Examen périodique

Professeur : Marc Frappier

Jeudi 13 octobre 2016, 9h30 à 12h20.

Notes importantes :

- Documentation permise.
- Ne dégrafez pas ce questionnaire.
- Répondez dans les espaces prévus à cet effet.
- La correction est, entre autres, basée sur le fait que chacune de vos réponses soit :
  - claire, c'est-à-dire lisible et compréhensible pour le lecteur;
  - précise, c'est-à-dire exacte et sans erreur;
  - concise, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'élément superflu;
  - complète, c'est-à-dire que tous les éléments requis sont présents.
- nombre de pages de l'examen, incluant celle-ci : 8.

Pondération :

Question	Point
1	30
2	15
3	10
4	5
5	5
6	15
7	20
total	100

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Signature : ______________________ Matricule : ______________________

1. (**30 pts**) Prouvez les formules suivantes en utilisant seulement les règles d'inférence de la déduction naturelle. Numérotez chaque hypothèse déchargée avec le numéro de l'étape où elle est déchargée (comme dans Panda). Indiquez chaque règle d'inférence utilisée.

   (a) $\vdash (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge (\neg p \vee q))$
   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})^{(1)}}{\mathbf{p}}\,(E\wedge) \qquad \dfrac{\dfrac{(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})^{(1)}}{\mathbf{q}}\,(E\wedge)}{(\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q})}\,(I\vee)}{(\mathbf{p}\wedge(\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q}))}\,(I\wedge)}{((\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})\to(\mathbf{p}\wedge(\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q})))}\,(I\to)(1)$$

   (b) $\vdash ((a \wedge b) \vee \neg(a \vee b)) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$
   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{((\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\vee\neg(\mathbf{a}\vee\mathbf{b}))^{(1)} \qquad \dfrac{(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{(3)}}{\mathbf{b}}\,(E\wedge) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{a}^{(2)}}{(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})}\,(I\vee) \qquad \neg(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})^{(4)}}{\perp}\,(I\perp)}{\mathbf{b}}\,(E\perp)}{\mathbf{b}}\,(E\vee)(3)(4)}{(\mathbf{a}\to\mathbf{b})}\,(I\to)(2)}{(((\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\vee\neg(\mathbf{a}\vee\mathbf{b}))\to(\mathbf{a}\to\mathbf{b}))}\,(I\to)(1)$$

   (c) $\vdash (a \Rightarrow c) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow ((a \vee b) \Rightarrow c))$
   Solution:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\mathbf{a}\vee\mathbf{b})^{(3)} \qquad \dfrac{(\mathbf{a}\to\mathbf{c})^{(1)} \quad \mathbf{a}^{(4)}}{\mathbf{c}}\,(E\to) \qquad \dfrac{(\mathbf{b}\to\mathbf{c})^{(2)} \quad \mathbf{b}^{(5)}}{\mathbf{c}}\,(E\to)}{\mathbf{c}}\,(E\vee)(4)(5)}{((\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\to\mathbf{c})}\,(I\to)(3)}{((\mathbf{b}\to\mathbf{c})\to((\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\to\mathbf{c}))}\,(I\to)(2)}{((\mathbf{a}\to\mathbf{c})\to((\mathbf{b}\to\mathbf{c})\to((\mathbf{a}\vee\mathbf{b})\to\mathbf{c})))}\,(I\to)(1)$$

2. (**15 pts**) Traduisez les énoncés suivants avec le langage de Tarski.

   (a) Les carrés situés à gauche du triangle a sont petits.

   Solution:

   $\mathsf{Triangle}(a) \wedge \forall x((\mathsf{Square}(x) \wedge \mathsf{LeftOf}(x, a)) \Rightarrow \mathsf{Small}(x))$

   (b) Les carrés sont plus grands que les triangles si, et seulement si, il existe au moins deux grands pentagones.

   Solution:

   $$\begin{array}{l} \quad (\forall x \cdot \forall y \cdot (\mathsf{Square}(x) \wedge \mathsf{Triangle}(y) \Rightarrow \mathsf{Smaller}(y, x))) \\ \Leftrightarrow \\ \quad (\exists x \cdot \exists y \cdot (x \neq y \wedge \mathsf{Pentagon}(x) \wedge \mathsf{Pentagon}(y) \wedge \mathsf{Large}(x) \wedge \mathsf{Large}(y))) \end{array}$$

   (c) Une condition suffisante pour que tous les grands objets soient des carrés est qu'il n'existe pas de petit triangle. Vous ne pouvez pas utiliser le quantificateur $\exists$ pour cette question.

   Solution:

   $(\forall x \cdot (\mathsf{Triangle}(x) \Rightarrow \neg\mathsf{Small}(x))) \Rightarrow (\forall x \cdot (\mathsf{Large}(x) \Rightarrow \mathsf{Square}(x)))$

   (d) Il existe un, et un seul, carré situé à gauche de tous les pentagones. Vous ne pouvez pas utiliser le quantificateur $\forall$ pour cette question.

   Solution:

   $\exists x \cdot (\mathsf{Square}(x) \wedge \neg(\exists y \cdot (\mathsf{Square}(y) \wedge x <> y)) \wedge \neg(\exists z \cdot (\mathsf{Pentagon}(z) \wedge \neg\mathsf{LeftOf}(x, z))))$

3. (**10 pts**) Considérez les formules suivantes

$$\neg(X_1 \vee X_2) \Rightarrow (X_3 \wedge \neg X_1) \tag{1}$$

$$\neg X_1 \tag{2}$$

$$\neg X_3 \tag{3}$$

(a) Donnez la table de vérité de ces trois formules.

Solution:

no	X1	X2	X3		¬(	X1	∨	X2)	⇒	(X3	∧	¬	X1)		¬	X1		¬	X3
1	0	0	0		1	0	0	0	0	0	0	1	0		1	0		1	0
2	0	0	1		1	0	0	0	1	1	1	1	0		1	0		0	1
3	0	1	0		0	0	1	1	1	0	0	1	0		1	0		1	0
4	0	1	1		0	0	1	1	1	1	1	1	0		1	0		0	1
5	1	0	0		0	1	1	0	1	0	0	0	1		0	1		1	0
6	1	0	1		0	1	1	0	1	1	0	0	1		0	1		0	1
7	1	1	0		0	1	1	1	1	0	0	0	1		0	1		1	0
8	1	1	1		0	1	1	1	1	1	0	0	1		0	1		0	1

(b) Existe-t-il un modèle pour ces trois formules? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 3.

(c) Est-ce que la formule (3) est une conséquence logique de (1) et (2)? Justifiez.

Solution: Non, à cause de la ligne 2, ou bien la ligne 4.

(d) Est-ce que ces 3 formules sont cohérentes? Justifiez.

Solution: Oui, la ligne 3 est un modèle pour les 3 formules.

4. (**5 pts**) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale disjonctive. Prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Donnez la formule la plus simple possible. Justifiez chaque étape de votre preuve.

$$X_1 \Leftrightarrow (X_2 \vee \neg X_3)$$

Solution:

$$\begin{array}{ll}
& X_1 \Leftrightarrow (X_2 \vee \neg X_3) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-41 } \} \\
& (X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_3)) \vee \neg(X_1 \vee (X_2 \vee \neg X_3)) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-11, LP-10 } \} \\
& (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_3) \vee \neg(X_1 \vee (X_2 \vee \neg X_3)) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-18 deux fois } \} \\
& (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg\neg X_3) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-21 } \} \\
& (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3)
\end{array}$$

5. (**5 pts**) Transformez la formule suivante en une formule équivalente en forme normale conjonctive. Prouvez votre transformation en utilisant les lois de la logique propositionnelle. Donnez la formule la plus simple possible. Justifiez chaque étape de votre preuve.

$$X_1 \Leftrightarrow (X_2 \vee \neg X_3)$$

Solution:

$$\begin{array}{ll}
& X_1 \Leftrightarrow (X_2 \vee \neg X_3) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-40 } \} \\
& (X_1 \Rightarrow (X_2 \vee \neg X_3)) \wedge ((X_2 \vee \neg X_3) \Rightarrow X_1) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-22 deux fois } \} \\
& (\neg X_1 \vee (X_2 \vee \neg X_3)) \wedge (\neg(X_2 \vee \neg X_3) \vee X_1) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-10, LP-18 } \} \\
& (\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge ((\neg X_2 \wedge \neg\neg X_3) \vee X_1) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-21 } \} \\
& (\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge ((\neg X_2 \wedge X_3) \vee X_1) \\
\Leftrightarrow & \qquad \{ \text{ LP-12, LP-9 } \} \\
& (\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_2 \vee X_1) \wedge (X_3 \vee X_1)
\end{array}$$

6. (**15 pts**) Soit les définitions suivantes:

```
MACHINE q5
SETS
  S={s1,s2,s3,s4}
; T={t1,t2,t3}
; U={u1,u2,u3}

CONSTANTS r1,r2,r3,r4,r5,r6,r7,r8,r9,r10,r11,S1,T1,T2

PROPERTIES

  r1 = {(s1,t1), (s2,t1), (s2,t2), (s3,t3)}
& r2 = {(t1,u3), (t2,u3), (t3,u3)}
& r3 = {(s1,s2), (s2,s1)}
& r4 = (r1;r2)
& r5 = {s1}<|r1
& r6 = r1|>{t1}
& r7 = r1|>>{t1}
& r8 = closure1(r3)
& r9 = (r1;r1~)-id(S)
& r10 = r1 <+ {s1|->t3}
& r11 = iterate(r3,4)
& S1 = dom(r1)
& T1 = ran(r1)
& T2 = r1[{s2}]

END
```

Donnez la valeur des expressions suivantes:

(a) `r4`
Solution: `{(s1|->u3),(s2|->u3),(s3|->u3)}`

(b) `r5`
Solution: `{(s1|->t1)}`

(c) `r6`
Solution: `{(s1|->t1),(s2|->t1)}`

(d) `r7`
Solution: `{(s2|->t2),(s3|->t3)}`

(e) `r8`
Solution: `{(s1|->s1),(s1|->s2),(s2|->s1),(s2|->s2)}`

(f) `r9`
Solution: `{(s1|->s2),(s2|->s1)}`

(g) `r10`
Solution: `{(s1|->t3),(s2|->t1),(s2|->t2),(s3|->t3)}`

(h) `r11`
Solution: `{(s1|->s1),(s2|->s2)}`

(i) `S1`
Solution: `{s1,s2,s3}`

(j) `T1`
Solution: `{t1,t2,t3}`

(k) `T2`
Solution: `{t1,t2}`

7. (**20 pts**) Soit les définitions suivantes inspirées du devoir 3.

```
MACHINE q6
SETS
  Personne={h1,h2,h3,f1,f2}

CONSTANTS
  Homme,Femme,Parent,BeauPere,BeauPere_alt

PROPERTIES
  Homme={h1,h2,h3}
& Femme=Personne-Homme
& Parent = {(h1,h3), (h2,f1), (h3,f2), (f1,f2)}
```

(a) Définissez par compréhension la relation BeauPere, qui contient les couples $x \mapsto y$ telles que x est le beau-père de y. On dit que x est le beau-père de y ssi x est le père du conjoint de y. Dans l'exemple de Parent ci-dessus, on a que `h1` est le beau-père de `f1`, et `h2` est le beau-père de `h3`. On dit que z_1 et z_2 sont des conjoints s'ils ont eu un enfant ensemble.

Solution:

```
BeauPere =
    { (x,y) |
      x :  Homme
      & x /= y
      & #(z1,z2).
        (
          z1 /= y
        & (x,z1) :  Parent
        & (z1,z2) :  Parent
        & (y,z2) :  Parent
        )
    }
```

(b) Définissez, en utilisant seulement des opérations sur les relations et les ensembles, la relation BeauPere_alt, qui contient les mêmes couples que BeauPere.

Solution: `BeauPere_alt = Homme <| (Parent;((Parent;Parent~ )-id(Personne)))`